1999.2

# METROLOGIA

Parte I

Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr.

LAB UFSC METRO FLORIANÓPOLIS

Laboratório de Metrologia e Automatização
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina

# Capítulo 1

# CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A medição é uma operação antiqüíssima e de fundamental importância para diversas atividades do ser humano. Na comunicação, por exemplo, toda vez que se quantifica um elemento, se está *medindo*, isto é, comparando este elemento com uma quantidade de referência conhecida pelo transmissor e receptor da comunicação.

O comércio é outra atividade onde a medição é fundamental: para que transações comerciais possam ser efetuadas, é necessário descrever as quantidades envolvidas em termos de uma base comum, isto é, de uma *unidade* de medição. Com a evolução da manufatura, esta necessidade se intensificou: é preciso descrever o bem fabricado em termos de elementos que o quantifiquem, isto é, número de um calçado, tamanho de uma peça, quantidade contida em uma embalagem, são apenas exemplos. A intercambialidade desejada entre peças e elementos de uma máquina só é possível através da expressão das propriedades geométricas e mecânicas destes elementos através de operações de medição.

Medir é uma forma de descrever o mundo. As grandes descobertas científicas, as grandes teorias clássicas foram, e ainda são, formuladas a partir de observações experimentais. Uma boa teoria é aquela que se verifica na prática. A descrição das quantidades envolvidas em cada fenômeno se dá através da medição.

A medição continua presente no desenvolvimento tecnológico. É através da medição do desempenho de um sistema que se avalia e realimenta o seu aperfeiçoamento. A qualidade, a segurança, o controle de um elemento ou processo é sempre assegurada através de uma operação de medição.

Há quem afirme que "*medir é fácil*". Afirma-se aqui que "*cometer erros de medição é ainda mais fácil*". De fato, existe uma quantidade elevada de fatores que podem gerar estes erros, conhece-los e controlá-los nem sempre é uma tarefa fácil.

Como o valor a medir é sempre desconhecido, não existe uma forma mágica de checar e afirmar que o número obtido de um sistema de medição representa a grandeza sob medição (mensurando). Porém, existem alguns procedimentos com os quais pode-se caracterizar e delimitar o quanto os erros podem afetar os resultados. Neste texto, são abordadas diversas técnicas e procedimentos que permitem a convivência pacífica com o erro de medição.

## *1.1. Medir Versus Colecionar Números*

É através de um *sistema de medição* (SM) que a operação medir é efetuada: o valor momentâneo do mensurando é descrito em termos de uma comparação com a unidade padrão referenciada pelo SM. O resultado da aplicação deste SM ao mensurando é um número acompanhado de uma unidade de Indicação.

Para o leigo, por mera ignorância ou ingenuidade, o trabalho de medição está encerrado quando se obtém este número. Na verdade, esta operação é uma parte do processo de medição. É uma tarefa relativamente simples a aplicação deste SM por várias vezes e a obtenção de infindáveis coleções de números. Porém, a obtenção de informações confiáveis a partir destes números, exige conhecimentos aprofundados sobre o SM e o processo de medição empregado. Sabe-se que não existe um SM perfeito: além de limitações construtivas internas, o SM é comumente afetado por efeitos diversos relacionados com o meio ambiente, com a forma e a técnica de aplicação deste SM, pelas influências da própria grandeza, dentre outros. É necessário considerar todos estes efeitos e exprimir um resultado confiável, respeitando a limitação deste SM.

O resultado de uma medição séria deve exprimir o grau de confiança a que é depositado pelo experimentador. Como é impossível obter uma Indicação exata, o erro provável envolvido deve **sempre** ser informado através de um parâmetro denominado *incerteza*. Existem diversos procedimentos e técnicas com as quais é possível determinar o nível de confiança de um resultado. Porém, bom senso e ceticismo são características adicionais indispensáveis a quem se dispõe a medir. A regra é "duvidar sempre, até que se prove o contrário".

A qualidade de uma medição se avalia pelo nível dos erros envolvidos. Porém, nem sempre deve-se buscar o "melhor" resultado, com mínimos erros. Depende da finalidade à qual se destinam estes resultados. Aceitam-se erros de ± 20 g em uma balança de uso culinário, porém estes erros não podem ser aceitos caso deseje-se medir a massa de pepitas de ouro. Medir com mínimos erros custa caro. À medida que se desejam erros cada vez menores, os custos se elevam exponencialmente. A seleção do SM a empregar é, portanto, uma ação de elevada importância que deve equilibrar as necessidades técnicas com os custos envolvidos.

### *1.2. O Erro de Medição Existe !*

Uma medição perfeita, isto é, sem erros, só pode existir se um SM (sistema de medição) perfeito existir e a *grandeza sob medição* (denominada *mensurando*) tiver um valor único, perfeitamente definido e estável. Apenas neste caso ideal o *resultado de uma medição* (RM) pode ser expresso por um número e uma unidade de medição apenas.

Sabe-se que não existem SM perfeitos. Aspectos tecnológicos forçam que qualquer SM construído resulte imperfeito: suas dimensões, forma geométrica, material, propriedades elétricas, ópticas, pneumáticas, etc, não correspondem **exatamente** à ideal. As leis e princípios físicos que regem o funcionamento de alguns SM nem sempre são perfeitamente lineares como uma análise simplista poderia supor. A existência de desgaste e deterioração de partes agravam ainda mais esta condição. Nestes casos, o SM gera erros de medição.

Perturbações externas, como, por exemplo, as condições ambientais, podem provocar erros, alterando diretamente o SM ou agindo sobre o mensurando, fazendo com que o comportamento do SM se afaste ainda mais do ideal. Variações de temperatura provocam dilatações nas escalas de um SM de comprimento, variações nas propriedades de componentes e circuitos elétricos, que alteram o valor indicado por um SM. Vibrações ambientais, a existência de campos eletromagnéticos, umidade do ar excessiva, diferentes pressões atmosféricas podem, em maior ou menor grau, afetar o SM, introduzindo erros nas indicações deste.

O operador e a técnica de operação empregada podem também afetar a medição. O uso de força de medição irregular ou excessiva, vícios de má utilização ou SM inadequados, podem levar a erros imprevisíveis. A forma, tamanho ou faixa de medição do SM pode não ser a mais indicada para aquela aplicação.

Em parte dos casos, o mensurando não possui valor único ou estável. Apenas um cilindro ideal apresenta um valor único para o seu diâmetro. Não se consegue fabricar um cilindro real com a forma geométrica matematicamente perfeita. Características da máquina operatriz empregada, dos esforços de corte, do material ou ferramenta empregada afastam a forma geométrica obtida da ideal. Mesmo que disponha de um SM perfeito, verifica-se que diferentes medições do diâmetro em diferentes ângulos de uma mesma secção transversal ou ao longo de diferentes seções ao longo do eixo do cilindro levam a diferentes números. Estas variações são de interesse quando se deseja caracterizar as propriedades do cilindro e devem ser informadas no resultado da medição. A temperatura de uma sala é outro exemplo de um mensurando instável: varia ao longo do tempo e com a posição onde é medida. A massa de uma peça metálica é um exemplo de um mensurando estável, se forem desprezados aspectos relativísticos.

Na prática estes diferentes elementos que afetam a resposta de um SM aparecem superpostos. Ao se utilizar de um sistema de medição para determinar o resultado de uma medição é necessário conhecer e considerar a faixa provável dentro da qual se situam estes efeitos indesejáveis - sua *incerteza* - bem como levar em conta as variações do próprio mensurando. Portanto, o resultado de uma medição não deve ser composto de apenas um número e uma unidade, mas de uma faixa de valores e a unidade. Em qualquer ponto dentro desta faixa deve situar-se o valor verdadeiro associado ao mensurando.

## 1.3. Terminologia

Para que se possa expor de forma clara e eficiente os conceitos da metrologia, através do qual são determinados e tratados os erros de medição, é preciso empregar a terminologia técnica apropriada. A terminologia adotada neste texto está baseada na Portaria 029 de 10 de março de 1995 do INMETRO - Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial, que estabelece o “Vocabulário de Termos Fundamentais e Gerais em Metrologia”. Este documento é baseado no vocabulário internacional de metrologia elaborado por diversas entidades internacionais tais como BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC e IUPAP.

# Capítulo 2

# MEDIR

## 2.1. *Por que Medir ?*

Do ponto de vista técnico, a medição é empregada para *monitorar*, *controlar* ou *investigar* um processo ou fenômeno físico.

Nas aplicações que envolvem monitoração, os SM (Sistemas de Medição) apenas indicam para o usuário o valor momentâneo ou acumulado do mensurando (ME). Barômetros, termômetros e higrômetros, quando usados para observar aspectos climáticos são exemplos clássicos de aplicações que envolvem monitoração. Medidores do consumo de energia elétrica ou volume d'água são outros exemplos. Nenhuma ação ou decisão é tomada em relação ao processo.

Qualquer sistema de controle envolve um SM como elemento sensor, compondo um sistema capaz de manter uma grandeza ou processo dentro de certos limites. O valor da grandeza a controlar é medido e comparado com o valor de referência estabelecido e uma ação é tomada pelo controlador visando aproximar a grandeza sob controle deste valor de referência. São inúmeros os exemplos destes sistemas. O sistema de controle da temperatura no interior de um refrigerador é um exemplo: um sensor mede a temperatura no interior do refrigerador e a compara com o valor de referência pré-estabelecido. Se a temperatura estiver acima do valor máximo aceitável, o compressor é ativado até que a temperatura atinja um patamar mínimo, quando é desligado. O isolamento térmico da geladeira mantém a temperatura baixa por um certo tempo, e o compressor permanece desativado enquanto a temperatura no interior estiver dentro da faixa tolerada. Exemplos mais sofisticados passam pelo controle da trajetória de um míssil balístico teleguiado, uma usina nuclear, uma máquina de comando numérico, etc.

Os recursos experimentais foram, e ainda são, uma ferramenta indispensável com a qual diversas descobertas científicas tornaram-se possíveis. Problemas nas fronteiras do conhecimento freqüentemente requerem consideráveis estudos experimentais em função de não existir ainda nenhuma teoria adequada. Estudos teóricos e resultados experimentais são complementares e não antagônicos. A análise combinada teoria-experimentação pode levar ao conhecimento de fenômenos com muito maior profundidade e em menor tempo do que cada uma das frentes em separado. Através da experimentação é possível, por exemplo, testar a validade de teorias e de suas simplificações, testar relacionamentos empíricos, determinar propriedades de materiais, componentes, sistemas ou o seu desempenho.

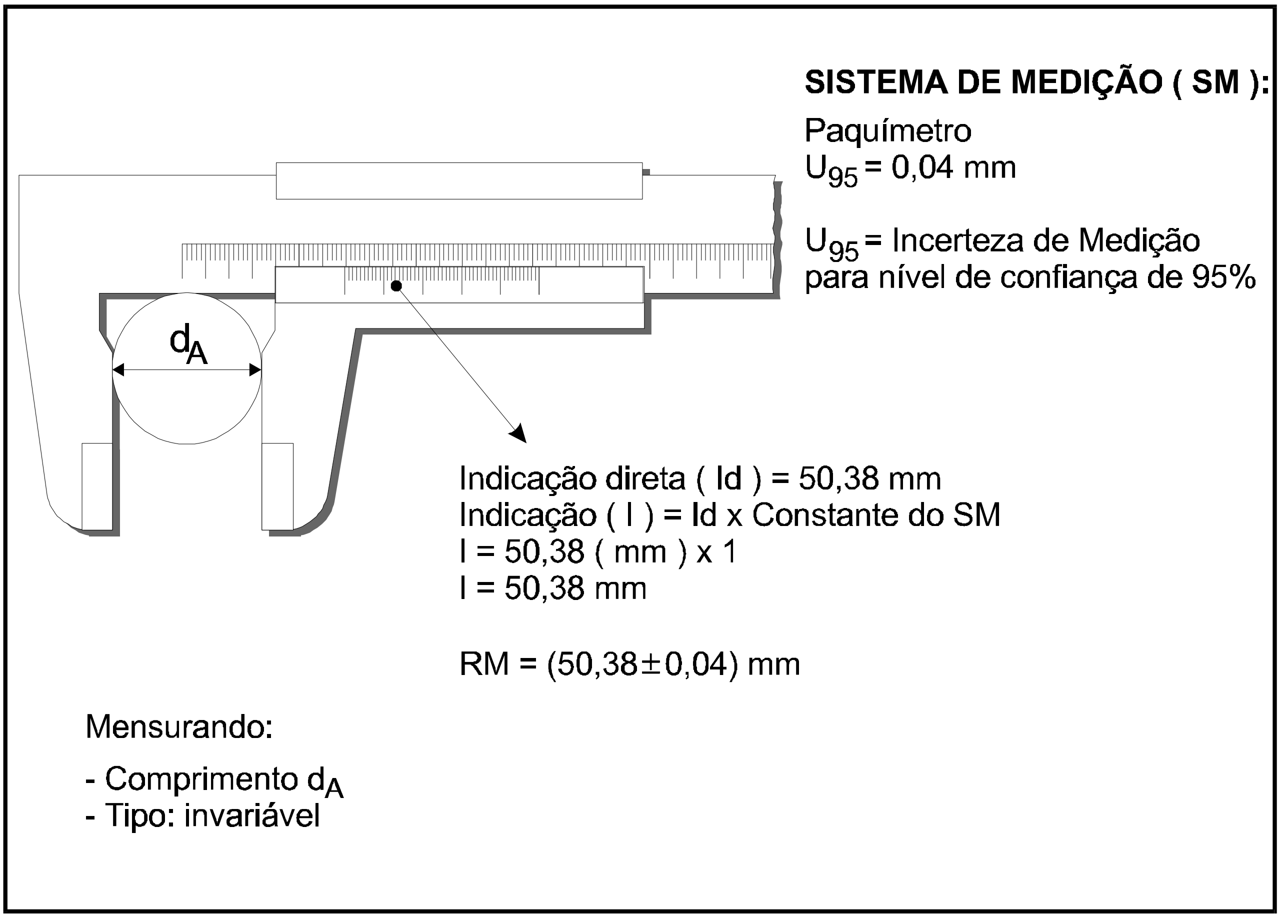
## 2.2. *O Processo da Medição*

Medir é o procedimento experimental pelo qual o valor momentâneo de uma grandeza física (*mensurando*) é determinado como um múltiplo e/ou uma fração de uma unidade, estabelecida por um padrão, e reconhecida internacionalmente.

A operação de medição é realizada por um *instrumento de medição* ou, de uma forma mais genérica, por um *sistema de medição* (SM), podendo este último ser composto por vários módulos.

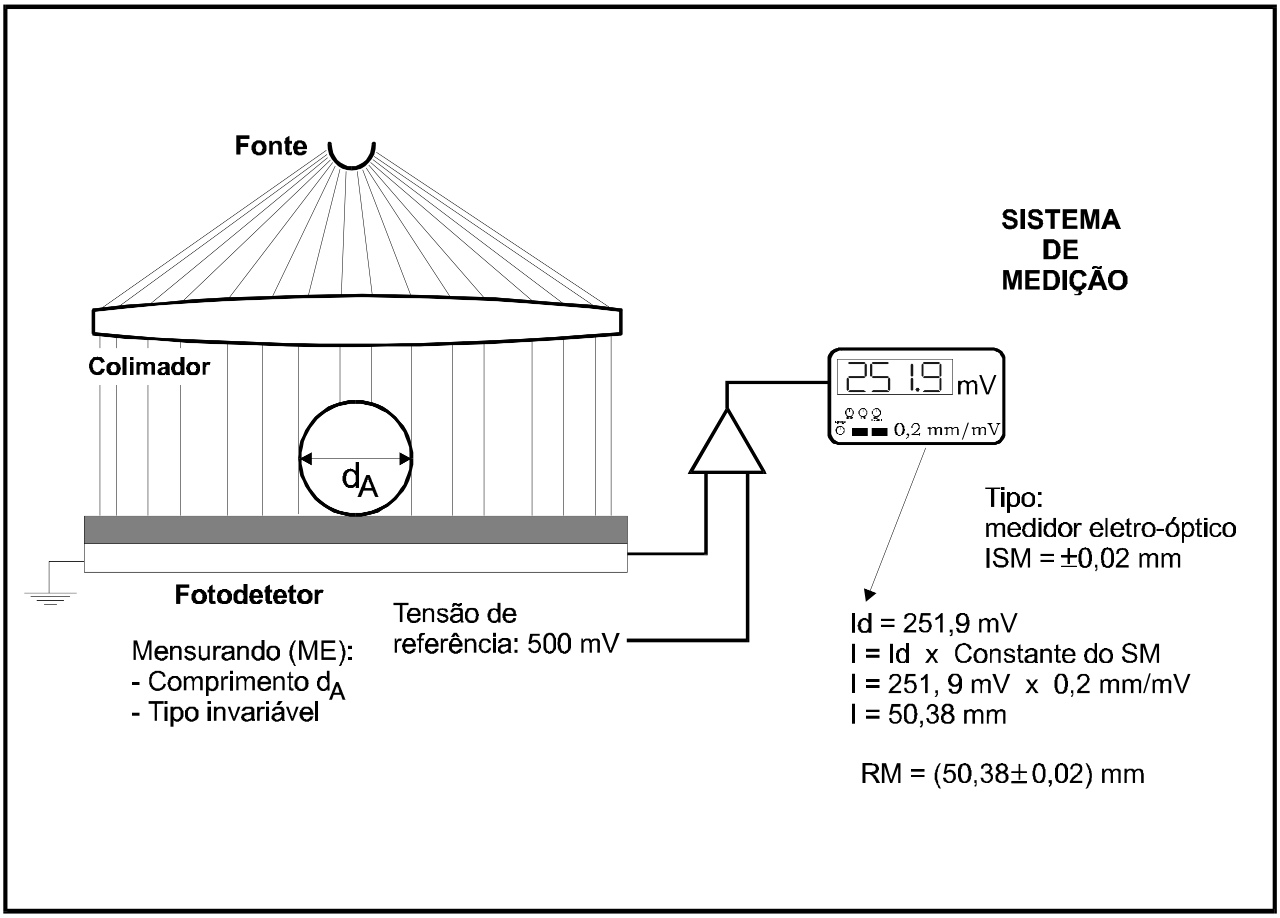
Obtém-se desta operação instrumentada a chamada *indicação direta*, que é o número lido pelo operador diretamente no *dispositivo mostrador*, acompanhado da respectiva unidade indicada neste dispositivo. Para que a medição tenha sentido, é necessário determinar a chamada *indicação*. A indicação corresponde ao valor momentâneo do mensurando no instante da medição, e é composta de um número acompanhado da mesma unidade do mensurando.

A indicação é obtida pela aplicação da chamada *constante do instrumento* à indicação direta. A constante do instrumento deve ser conhecida pelo usuário do SM antes do início da operação de medição. Pode ser expressa através de constante aditiva ou multiplicativa, e em alguns casos o valor da indicação pode ser calculada a partir de equações lineares ou não lineares, tabelas ou gráficos



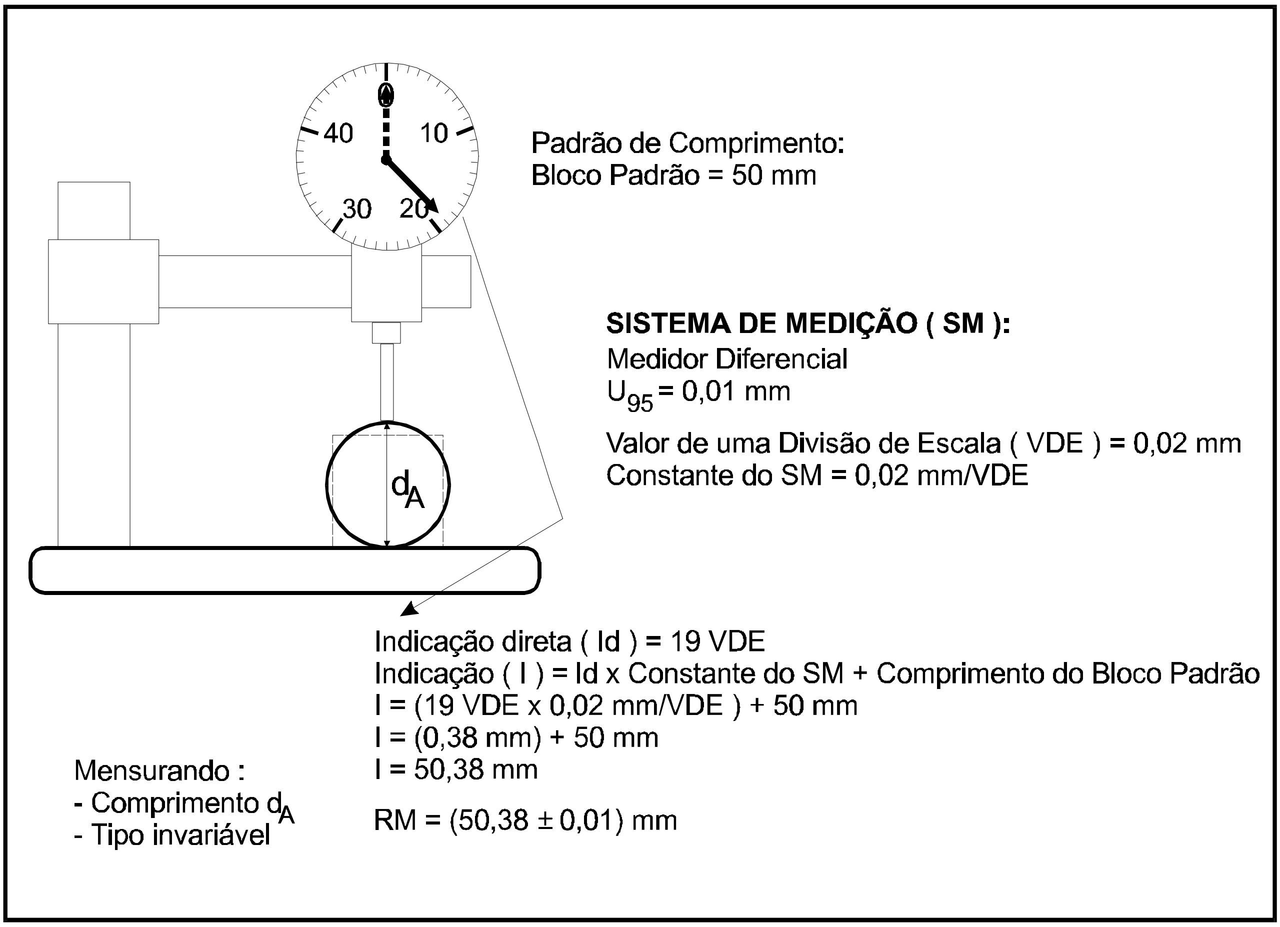

AAG - 11/97 - MCG 001

Figura 2.1 - Operação de Medição



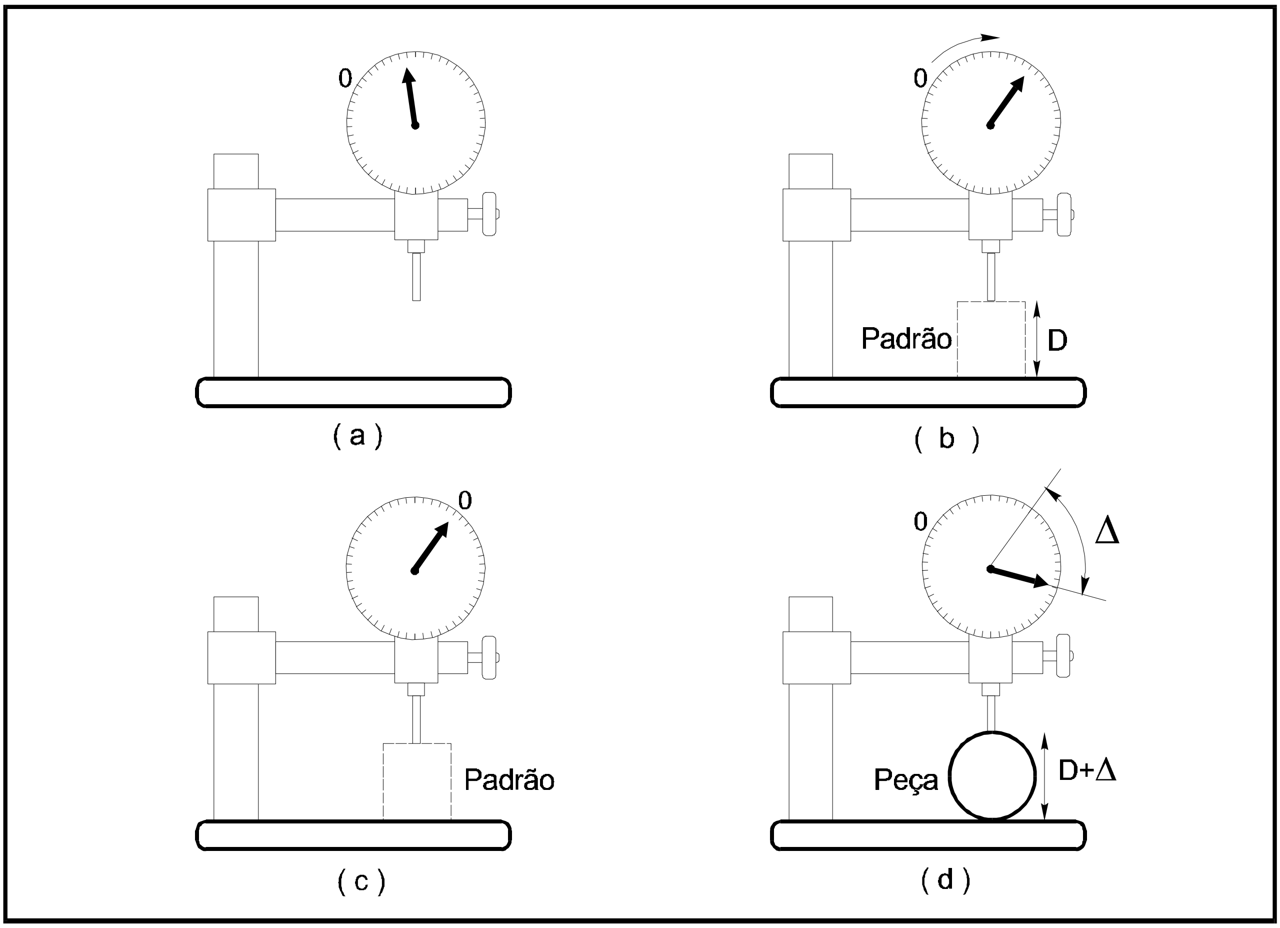

AAG - 10/97 - MCG 002

Figura 2.2 - Operação de Medição




AAG - 11/97 - MCG 003

Figura 2.3 - Operação de Medição




CAF- 07/98 - AM 065

Figura 2.4 - Medição Diferencial

A figura 2.1 ilustra a operação de medição realizada através de um instrumento de medição denominado paquímetro. A indicação direta obtida é 50,38 mm. Sabe-se que a constante multiplicativa deste instrumento é unitária. Logo, a indicação resulta em:

I = 50,38 mm,

que corresponde ao comprimento medido.

O exemplo da figura 2.2 consiste de um SM de comprimento que funciona por princípios optoeletrônicos. A peça a medir é iluminada por um feixe de luz colimada e uniforme. A sombra do comprimento a medir é projetada sobre o fotodetetor, que gera um sinal elétrico proporcional à quantidade de energia recebida, que é proporcional à área iluminada. Este sinal elétrico é amplificado por meio de um circuito eletrônico e indicado pelo SM. Como mostra a figura 2.2, a indicação direta é 251,9 mV. Neste caso, fica claro que 251,9 mV não é o valor do diâmetro a medir. O cálculo do valor da indicação é efetuado através da constante multiplicativa do SM: 0,2 mm/mV. Assim,

I = 251,9 mV . 0,2 mm/mV = 50,38 mm.

A figura 2.3 mostra um outro exemplo de SM. Deste SM faz parte um relógio comparador, cuja indicação reflete o deslocamento vertical da sua haste. A medição é efetuada em três etapas:

a) inicialmente um bloco padrão de comprimento conhecido de 50 mm é aplicado sobre o SM;

b) o SM é regulado para que, neste caso, a indicação direta seja zero;

c) o padrão de 50 mm é retirado e a peça a medir é submetida ao SM;

A indicação direta obtida, neste caso, é de 19 divisões, e está associada à diferença entre os comprimentos da peça a medir e o padrão de 50 mm. A determinação da indicação envolve uma constante aditiva igual ao comprimento do padrão de 50 mm e uma constante multiplicativa relacionada com a sensibilidade do relógio comparador, isto é, com a relação mm/divisão deste relógio comparador. Assim, o valor da indicação é:

I = 50 mm + 19 div . 0,02 mm/div
I = 50,38 mm

Em boa parte dos SM comerciais a *indicação* coincide numericamente com a *indicação direta*, caso em que a constante do instrumento é multiplicativa e unitária, o que torna bastante cômoda e prática a aplicação do SM. Porém, deve-se estar atento para as diversas situações.

### *2.3. O Resultado de uma Medição*

A indicação, obtida de um SM, é sempre expressa por meio de um número e a unidade do mensurando. O trabalho de medição não termina com a obtenção da *indicação*. Neste ponto, na verdade, inicia o trabalho do experimentalista. Ele deverá chegar à informação denominada: *resultado de uma medição*.
O resultado de uma medição (RM) expressa propriamente o que se pode determinar com segurança sobre o valor do mensurando, a partir da aplicação do SM sobre esta. É composto de duas parcelas:

a) o chamado *resultado base* (RB), que corresponde ao valor central da faixa onde deve situar-se o valor verdadeiro do mensurando;
b) e a *incerteza da medição* (IM), que exprime a faixa de dúvida ainda presente no resultado, provocada pelos erros presentes no SM e/ou variações do mensurando, e deve sempre ser acompanhado da unidade do mensurando. Assim, o resultado de uma medição (RM) deve ser sempre expresso por:

RM = (RB ± IM) [unidade]

O procedimento de determinação do RM deverá ser realizado com base no:
a) conhecimento aprofundado do processo que define o mensurando (o fenômeno físico e suas características);
b) conhecimento do sistema de medição (características metrológicas e operacionais);

c) bom senso.

No capítulo 6 são detalhados os procedimentos empregados para a determinação do RB e da IM a partir dos dados do SM, das características do mensurando e das medições efetuadas.

# Capítulo 3

# O SISTEMA DE MEDIÇÃO

É necessário o conhecimento das características metrológicas e operacionais de um sistema de medição para sua correta utilização. Para tal, é necessária a definição de alguns parâmetros para caracterizar de forma clara o seu comportamento. Antes de iniciar tal estudo é conveniente classificar as partes que compõem um sistema de medição típico e caracterizar os métodos de medição.

## *3.1. O Sistema Generalizado de Medição*

A análise sistêmica de diversos SM revela a existência de três elementos funcionais bem definidos que se repetem com grande freqüência na maioria dos sistemas de medição em uso. Em termos genéricos, um SM pode ser dividido em três módulos funcionais: o *sensor/transdutor*, a *unidade de tratamento do sinal* e o *dispositivo mostrador*. Cada módulo pode constituir uma unidade independente ou pode estar fisicamente integrada ao SM. A figura 3.1 mostra genericamente este SM.

O *transdutor* é o módulo do SM que está em contato com o mensurando. Gera um sinal proporcional (mecânico, pneumático, elétrico ou outro) ao mensurando segundo uma função bem definida, normalmente linear, baseada em um ou mais fenômenos físicos. Em termos gerais, um transdutor transforma um efeito físico noutro. Quando o transdutor é composto de vários módulos, várias transformações de efeitos podem estar presentes. O primeiro módulo do transdutor, aquele que entra em contato diretamente com o mensurando, é também denominado de *sensor.* A rigor, o sensor é uma parte do transdutor.

O sinal gerado pelo sensor/transdutor normalmente é um sinal de baixa energia, difícil de ser diretamente indicado. A *unidade de tratamento do sinal* (UTS), além da amplificação da potência do sinal, pode assumir funções de filtragem, compensação, integração, processamento, etc. É às vezes chamada de condicionador de sinais. Este módulo pode não estar presente em alguns SM mais simples.

O *dispositivo mostrador* recebe o sinal tratado (amplificado, filtrado, etc) e através de recursos mecânicos, eletro-mecânicos, eletrônicos ou outro qualquer, transforma-o em um número inteligível ao usuário, isto é, produz uma indicação direta perceptível. Este módulo subentende também dispositivos registradores, responsáveis pela descrição analógica ou digital do sinal ao longo do tempo ou em função de outra grandeza independente. São exemplos: registradores X-Y, X-T, gravadores de fita, telas de osciloscópios, etc.

A figura 3.2 exemplifica alguns SM's, onde são identificados estes elementos funcionais. A mola é o transdutor do dinamômetro da figura 3.2a: transforma a força em deslocamento da sua extremidade, que é diretamente indicado através de um ponteiro sobre a escala. Neste caso não há a unidade de tratamento de sinais. Já o exemplo da figura 3.7b incorpora uma unidade deste tipo, composta pelo mecanismo de alavancas: o pequeno deslocamento da extremidade da mola é mecanicamente amplificado por meio da alavanca que, contra a escala, torna cômoda a indicação do valor da força. Na figura 3.2c, representa-se um outro dinamômetro: o transdutor é composto de vários módulos: a força é transformada em deslocamento por meio da mola, em cuja extremidade está fixado um núcleo de material ferroso que, ao se mover, provoca variação da indutância de uma bobina, que provoca um desbalanceamento elétrico em um circuito, provocando uma variação de tensão elétrica proporcional. Este sinal é amplificado pela UTS, composta de circuitos elétricos, e indicado através de um dispositivo mostrador digital.

Mesmo o termômetro da figura 3.3 possui os três elementos funcionais. A temperatura a medir é absorvida pelo fluído no interior do bulbo, que é o transdutor deste sistema, e sofre variação volumétrica. Esta variação é praticamente imperceptível a olho nu. O tubo capilar do termômetro tem por finalidade amplificar este sinal, transformando a variação volumétrica deste fluído em grande variação da coluna do fluído, o que caracteriza a UTS deste sistema. O mostrador é formado pela coluna do líquido contra a escala.

### *3.2. Métodos Básicos de Medição*

Para descrever o valor momentâneo de uma grandeza como um múltiplo e uma fração decimal de uma unidade padrão, um SM pode operar segundo um dos dois princípios básicos de medição: o método da indicação (ou deflexão) ou o método da zeragem (ou compensação).

### *3.3. Métodos Básicos de Medição*

Para descrever o valor momentâneo de uma grandeza como um múltiplo e uma fração decimal de uma unidade padrão, um SM pode operar segundo um dos dois princípios básicos de medição: o método da indicação (ou deflexão) ou o método da zeragem (ou compensação).

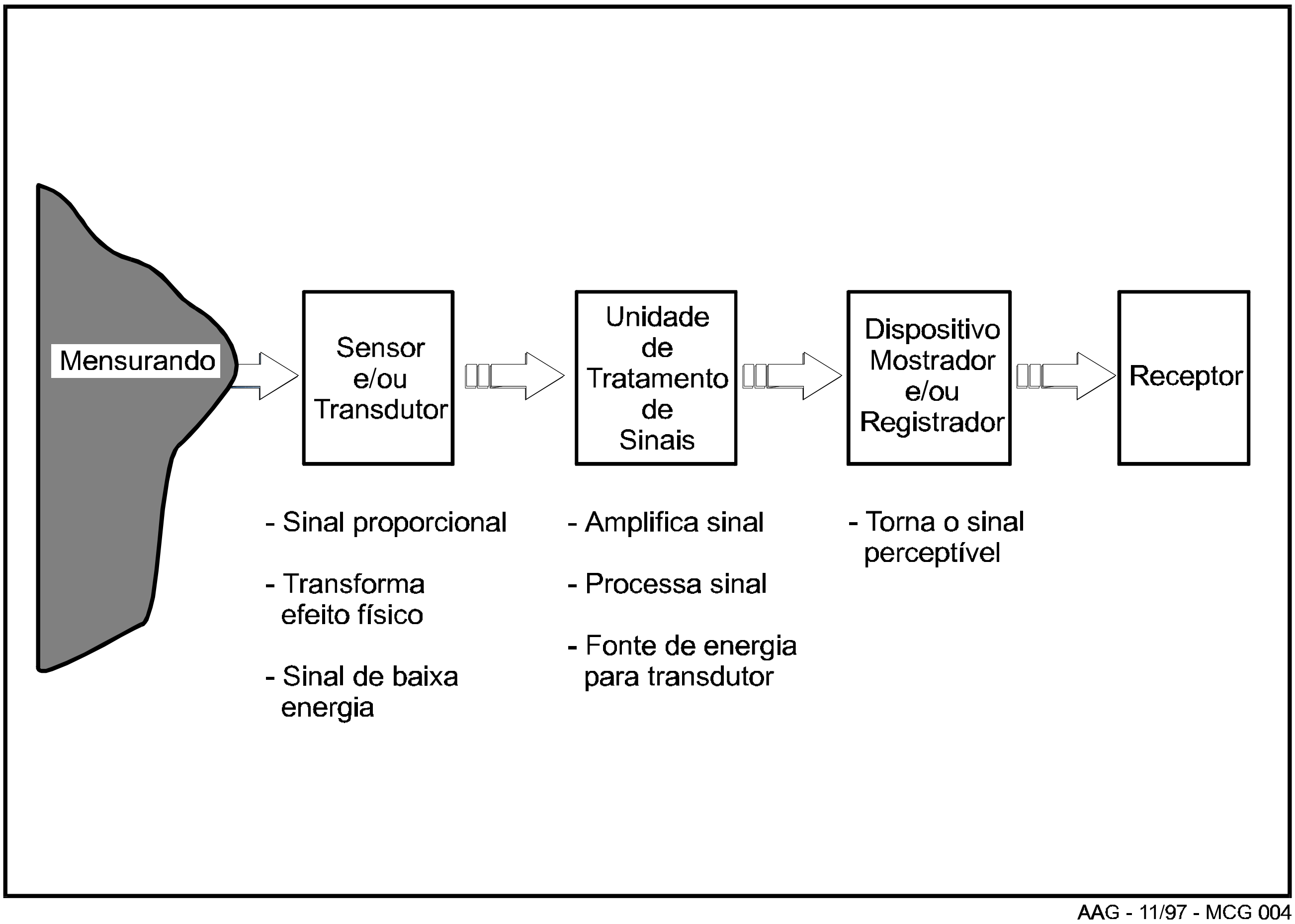



Figura 3.1 - Sistema Generalizado de Medição

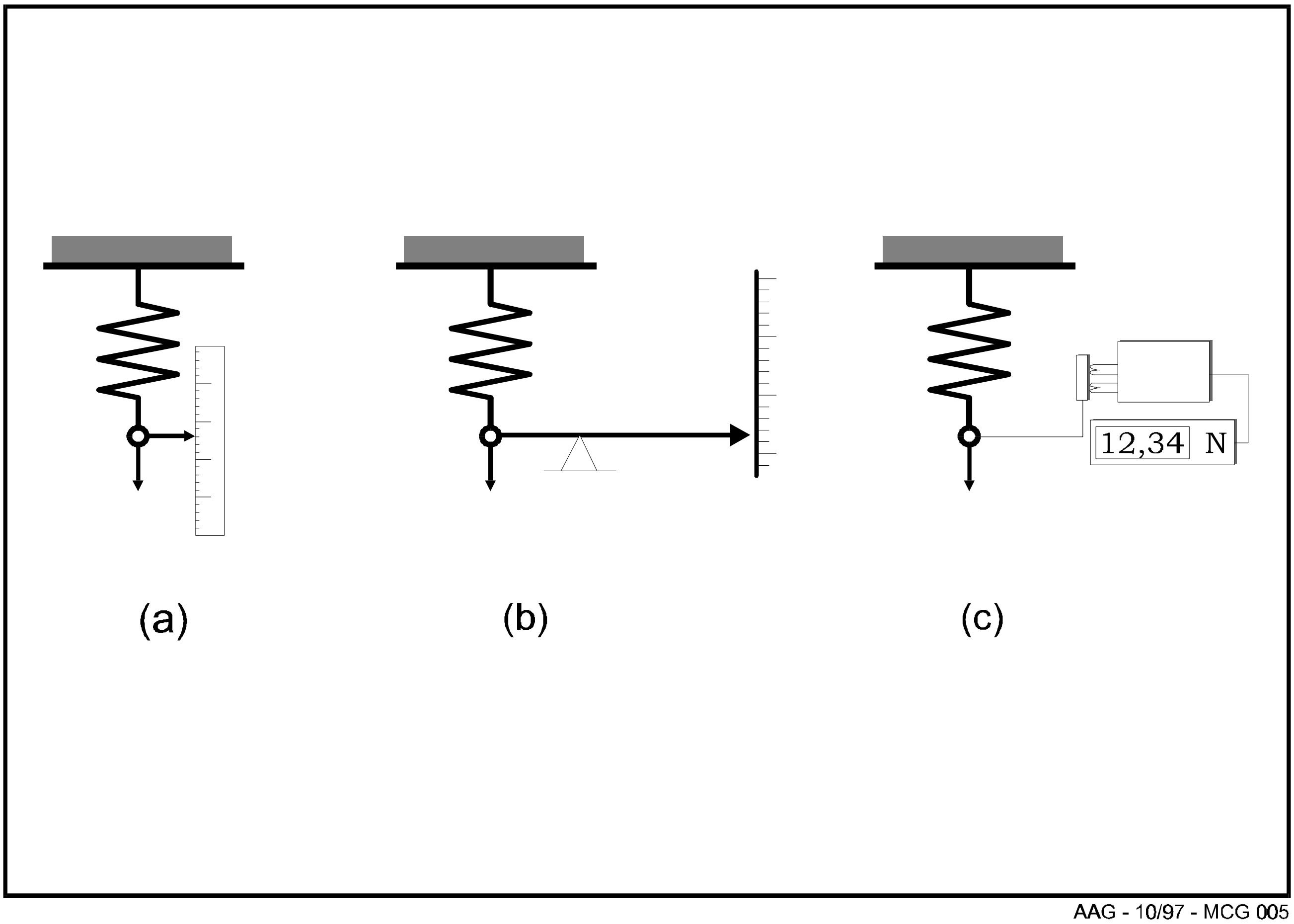



Figura 3.2 - Três exemplos de Dinamômetros

### 3.3.1. O método da indicação ou deflexão

Em um SM que opera segundo o método da *indicação*, a indicação direta é obtida no dispositivo mostrador, seja este um mostrador de ponteiro, indicador digital ou registrador gráfico, à medida em que o mensurando é aplicado sobre este SM. São inúmeros os exemplos de SM que operam por este princípio: termômetros de bulbo ou digitais, manômetros e ou balanças com indicação analógica ou digital, balança de mola, etc. (fig. 3.4)

### 3.3.2. O método da zeragem ou compensação

No método da zeragem, procura-se gerar uma grandeza padrão com valor conhecido, equivalente e oposto ao mensurando, de forma que as duas, atuando sobre um dispositivo comparador, indiquem diferença zero. A balança de prato é um exemplo clássico de SM que opera por este princípio: procura-se formar em um dos pratos uma combinação de massas padrão que tendem a contrabalançar a massa desconhecida colocada no outro prato. Ambas massas são equivalentes quando a balança atingir o equilíbrio (fig. 3.5).
Uma variante deste método é a medição por substituição. Neste caso, substitui-se o mensurando por um elemento que tenha seu valor conhecido e que cause no SM o mesmo efeito que o mensurando. Quando estes efeitos se igualam, assume-se que o valores destas grandezas também são iguais.

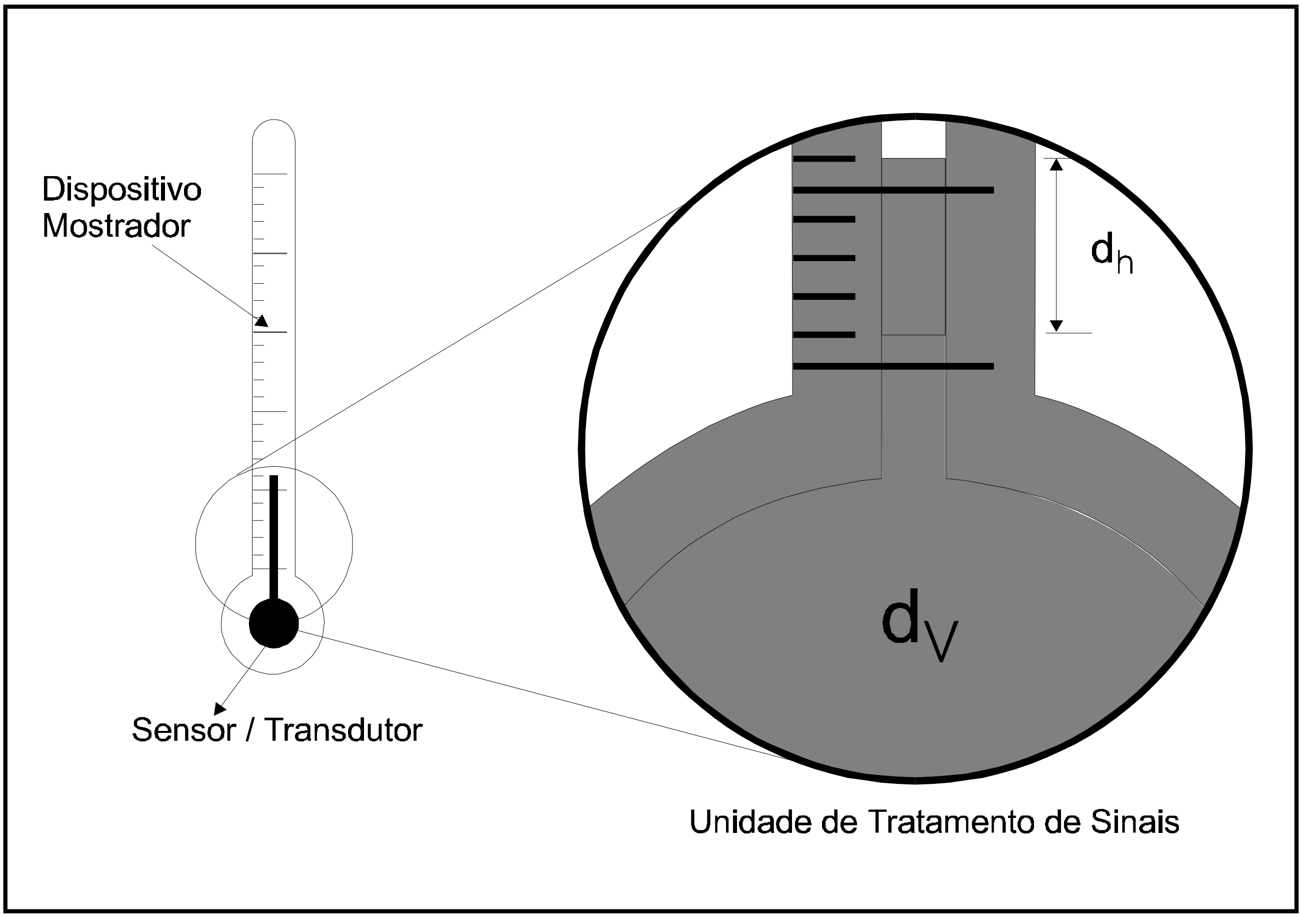
### 3.3.3. O método diferencial

O método de medição diferencial resulta da combinação dos dois métodos anteriores. O mensurando é comparado a uma grandeza padrão e sua diferença medida por um instrumento que opera segundo o método da indicação.
Normalmente o valor da grandeza padrão é muito próximo do mensurando de forma que a faixa de medição do instrumento que opera por indicação pode ser muito pequena. Como conseqüência, seu erro máximo pode vir a ser muito reduzido sem que seu custo se eleve. A incerteza da grandeza padrão geralmente é muito baixa o que resulta em um sistema de medição com excelente estabilidade e desempenho metrológico, sendo de grande utilização na indústria.
A medição do diâmetro por meio do relógio comparador da figura 2.3 é um exemplo de medição diferencial.

### 3.3.4. Análise comparativa

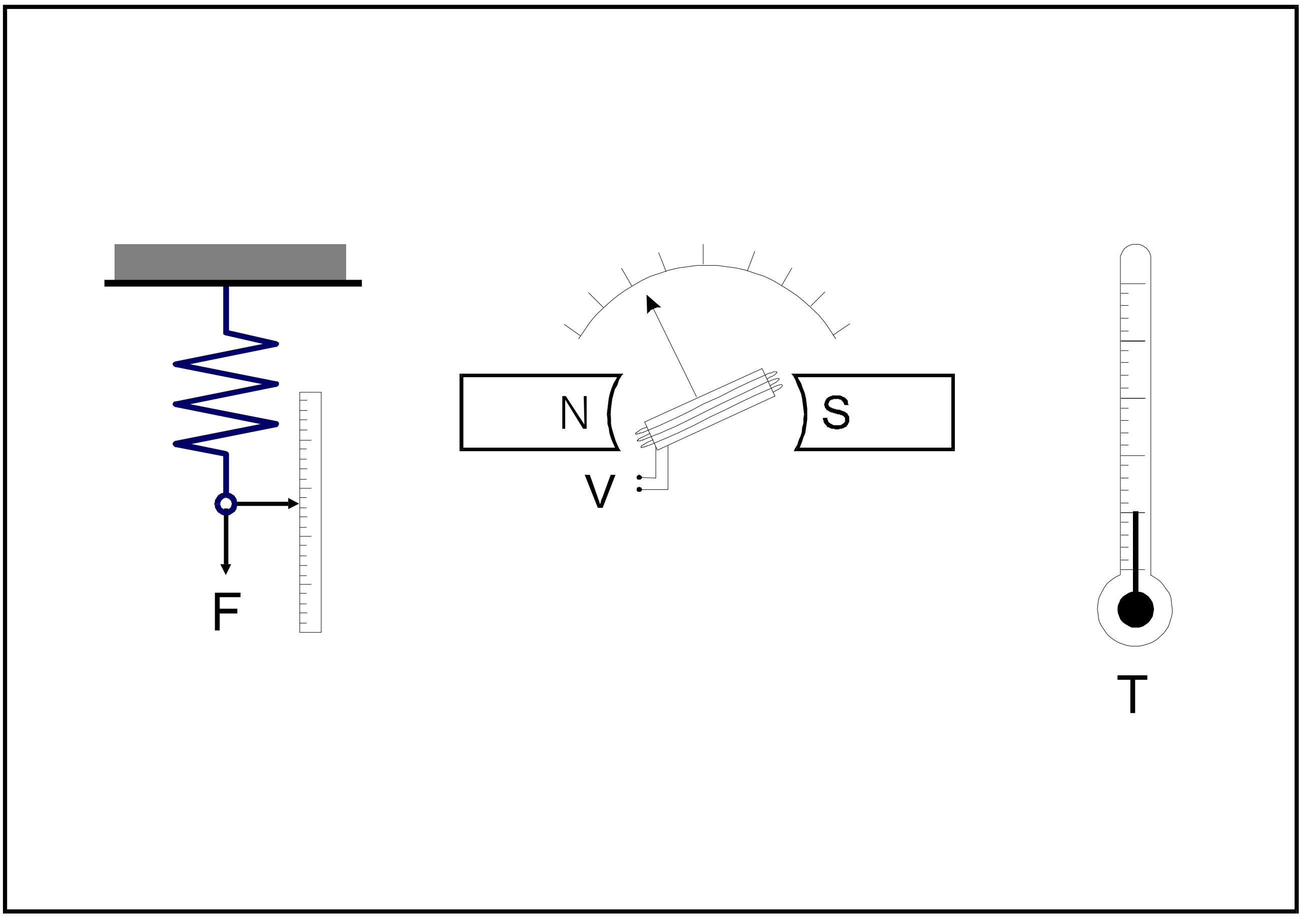
Comparativamente, cada método possui vantagens e desvantagens. Na balança de mola, por exemplo, a incerteza do SM depende da calibração da mola, ao passo em que, na balança de prato, depende da incerteza das massas padrão. Como a confiabilidade e estabilidade das massas padrão é geralmente melhor que a da mola, pode-se afirmar que normalmente a incerteza do método de zeragem é superior ao da indicação.
A principal desvantagem do método de zeragem é a velocidade de medição que é sensivelmente inferior, uma vez que deve-se modificar a grandeza padrão até que o zero seja atingido, o que torna o SM que usa este método inadequado para aplicações dinâmicas.
A medição diferencial apresenta características que a coloca em uma posição muito atrativa, sendo de fato muito adotada na indústria.

| Característica | Indicação | Zeragem | Diferencial |
|---|---|---|---|
| Estabilidade | baixa | muito elevada | elevada |
| Velocidade de medição | muito elevada | muito baixa | elevada |
| Custo inicial | elevado | moderado | moderado |
| Facilidade de automação | elevada | muito baixa | elevada |
| Erro máximo | moderado | muito pequeno | muito pequeno |




AAG - 11/97 - MCG 006

Figura 3.3 -Elementos Funcionais de um Termômetro




AAG - 11/97 - MCG 007

Figura 3.4 - Medição pelo Método da Indicação

### 3.4. *Parâmetros Característicos de Sistemas de Medição*

Alguns parâmetros metrológicos são aqui definidos para melhor caracterizar o comportamento metrológico de de sistemas de medição. Estes parâmetros podem ser expressos na forma de um simples número (que define o valor máximo assumido pelo SM em toda a sua faixa de medição), uma faixa de valores, uma tabela ou na forma de um gráfico. A apresentação do parâmetro na forma de um simples número, também chamado de *parâmetro reduzido*, traz menos informações sobre o comportamento do SM, porém é uma forma simplificada de representar o parâmetro e é facilmente aplicável em uma comparação.

#### 3.4.1. Faixa de Indicação (FI)

A faixa de indicação (FI) é o intervalo entre o menor e maior valor que o dispositivo mostrador do SM teria condições de apresentar como indicação direta (ou indicação). Nos medidores de indicação analógica a FI corresponde ao intervalo limitado pelos valores extremos da escala. É comum especificar a capacidade dos indicadores digitais como sendo, por exemplo, de 3 ½ dígitos quando o valor máximo é ± 1999 ou 4 dígitos quando valor máximo é ± 9999. Exemplos de faixas de indicação:

- Manômetro : 0 a 20 bar
- Termômetro : 700 a 1200 °C
- Contador : 5 dígitos (isto é, 99999 pulsos)
- Voltímetro : ± 1,999 V (isto é, ± 3 ½ dígitos)

Quando o mesmo sistema de medição permite que várias faixas de medição sejam selecionadas através da ação de controles do SM, isto é, em seu mostrador estão presentes várias escalas, sendo que apenas uma é selecionada ativa a cada momento, cada uma destas faixas é denominada de *faixa nominal*.

#### 3.4.2. Faixa de Medição (FM)

É o conjunto de valores de um mensurando para o qual admite-se que o erro de um instrumento de medição mantém-se dentro de limites especificados. Exemplos:
- Termômetro: FM = - 50 a 280 °C
- Medidor de deslocamento: FM = ± 50 mm (ou FM = - 50 a + 50 mm)

A faixa de medição é menor ou, no máximo, igual a faixa de indicação. O valor da FM é obtido através:
- do manual de utilização do SM
- de sinais gravados sobre a escala
- das especificações de normas técnicas
- dos relatórios de calibração.

#### 3.4.3. Valor de uma Divisão (de Escala) (VD)

Nos instrumentos com mostradores analógicos corresponde à diferença entre os valores da escala correspondentes à duas marcas sucessivas. O valor de uma divisão é expresso na unidade marcada sobre a escala, qualquer que seja a unidade do mensurando. Exemplos:
- manômetro: VD = 0,2 bar
- termômetro: VD = 5 K

#### 3.4.4. Incremento Digital (ID)

Nos instrumentos com mostradores digitais, corresponde à menor variação da indicação direta possível de ser apresentada. Deve-se atentar o fato que nos mostradores digitais a variação do último dígito não é sempre unitária. Com freqüência a variação é de 5 em 5 unidades e algumas vezes de 2 em 2 unidades.

### 3.4.5. Resolução (R)

Resolução é a menor diferença entre indicações que pode ser significativamente percebida. A avaliação da resolução é feita em função do tipo de instrumento:
a) Nos sistemas com mostradores digitais, a resolução corresponde ao incremento digital;
b) Nos sistemas com mostradores analógicos, a resolução teórica é zero. No entanto, em função das limitações do operador, da qualidade do dispositivo indicador e da própria necessidade de leituras mais ou menos criteriosas, a resolução a adotar poderá ser:

| | |
|---|---|
| R = VD | quando o mensurando apresenta flutuações superiores ao próprio VD, ou no caso de tratar-se de uma escala grosseira, de má qualidade; |
| R = VD/2 | quando tratar-se de SM de qualidade regular ou inferior e/ou o mensurando apresentar flutuações significativas e/ou quando o erro de indicação direta não for crítico; |
| R = VD/5 | quando tratar-se de SM de boa qualidade (traços e ponteiros finos, etc.) e a medição em questão tiver de ser feita criteriosamente; |
| R = VD/10 | quando o SM for de qualidade, o mensurando estável a medição for altamente crítica quanto a erros de indicação direta e a incerteza do SM foi inferior ao VD; |

### 3.4.6. Erro Sistemático (Es)

É a parcela do erro que se repete quando uma série de medições é efetuada nas mesmas condições. Numericamente corresponde à média de um número infinito de medições do mesmo mensurando, efetuadas sobre condições de repetitividade, menos o valor verdadeiro do mensurando. Em termos práticos, adota-se a tendência como estimativa do erro sistemático.

### 3.4.7. Repetitividade (Re) de um SM

Especifica a faixa de valores dentro da qual, com uma probabilidade estatística definida, se situará o valor do erro aleatório da indicação de um SM, para as condições em que a medição é efetuada. Normalmente especifica-se a Re com confiabilidade de 95%. A utilização de outros níveis de confiabilidade 99% (± 3s), depende da aplicação e obedece tradições, determinações de norma ou desejo do usuário.

### 3.4.8. Característica de Resposta Nominal (CRn)

Todo sistema de medição tem o seu comportamento ideal (nominal) regido por um princípio físico bem definido. A equação que exprime o relacionamento ideal entre o estímulo (grandeza de entrada no SM) e a sua resposta (saída) é denominada de Característica de Resposta Nominal (CRn), como mostra a figura 3.6. Esta relação, na maioria dos casos, é linear, constituída de uma constante multiplicativa e/ou aditiva. Embora mais raras, funções polinomiais e exponenciais podem também ser adotadas como CRn.
A relação entre o deslocamento (x) da extremidade da mola do dinamômetro da figura 2.7.a e a força aplicada nesta extremidade (F) é definida pela constante de mola (K) por: F = K x. A equação da CRn deste SM é então dada por: CRn(x) = F/K.

### 3.4.9. Característica de Resposta Real (CRr)

Na prática, o ideal não acontece. A resposta de um SM ao estímulo (mensurando) não segue exatamente o comportamento previsto pela CRn em decorrência de imperfeições que se manifestam de forma sistemática e/ou aleatória. Define-se então a Característica de Resposta Real (CRr) como a relação que **realmente** ocorre entre o estímulo e a resposta do SM, seja em termos da indicação direta ou indicação.

A característica de resposta real difere da nominal, em função do SM apresentar erros sistemáticos e erros aleatórios, sendo portanto melhor caracterizada por uma linha média (indicação média) e uma faixa de dispersão associada, geralmente estimada pela repetitividade.

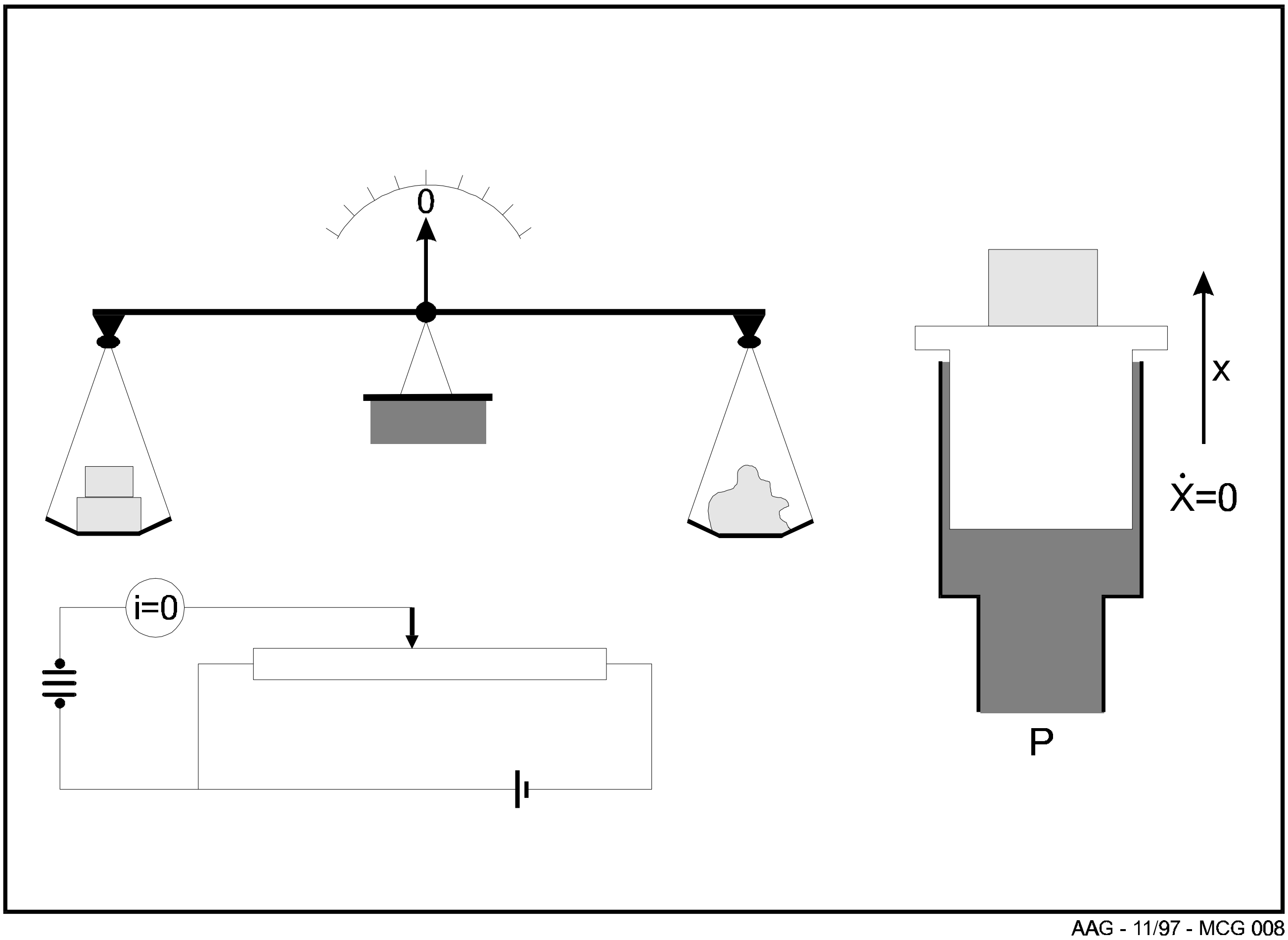



Figura 3.5 - Medição pelo Método da Comparação

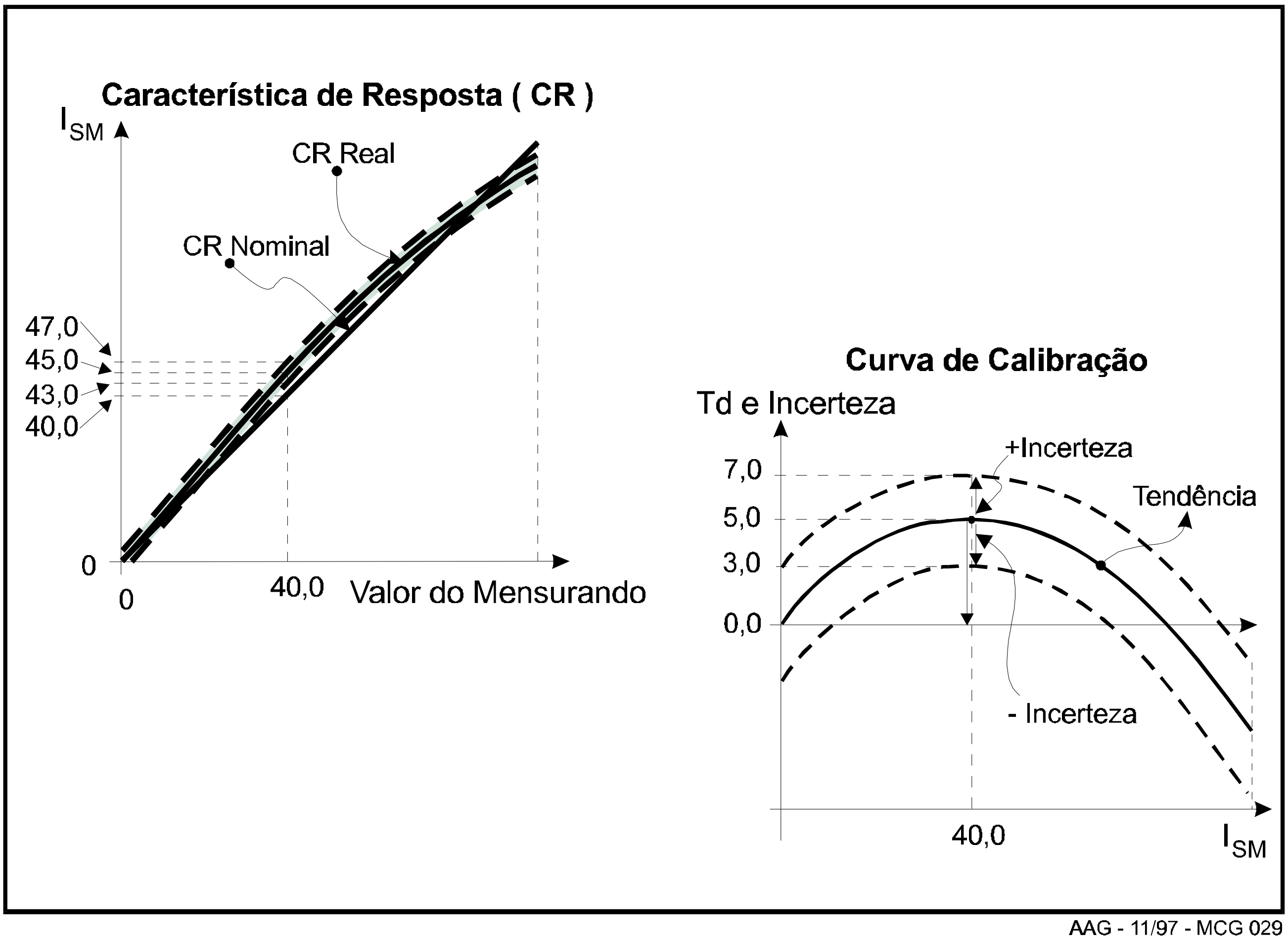



Figura 3.6 - Característica de Resposta e Curva de Calibração

Normalmente não é fácil prever o como e o quanto a CRr se afastará da CRn. A forma construtiva, as características individuais de cada elemento, o grau de desgaste, as propriedades dos materiais, influenciam esta diferença.

### 3.4.10. Curva de Erro (CE)

O comportamento ideal (nominal) de um SM de boa qualidade não difere muito do comportamento real. Na prática, a representação da CRr em um gráfico que relacione o estímulo e a resposta será visualizado como se fosse praticamente uma reta, já que as diferenças entre a CRn e a CRr são muito pequenas.
Para tornar claramente perceptível o como e o quanto o comportamento real de um SM se afasta do ideal, emprega-se o gráfico conhecido como *curva de erros* (CE), como mostrado na figura 3.6. A indicação apresentada pelo SM é comparada com um valor padrão ao qual o SM é repetidamente submetido. São estimadas a tendência (erros sistemáticos) e a repetitividade do SM para aquele ponto. O processo é repetido para certo número de pontos dentro da faixa de medição, sendo usados diferentes valores padrão. Como resultado, obtém-se a curva de erros que descreve a forma como os erros sistemáticos (tendência) representada pela linha central e os erros aleatórios (faixa de ± Re em torno da Td) se distribuem ao longo da faixa de medição.
Na curva de erros, os erros são apresentados em função da indicação, ou, às vezes, da indicação direta. Este gráfico é bastante explícito sobre o comportamento do SM em toda a faixa de medição (fig. 3.6).

### 3.4.11. Correção (C)

A correção corresponde à tendência com sinal trocado. Este termo é às vezes empregado em substituição à Td quando é efetuada a sua compensação. Seu uso é predominante nos certificados de calibração em lugar da tendência. A correção deve ser somada ao valor das indicações para "corrigir" os erros sistemáticos.

### 3.4.12. Erro Máximo ($E_{max}$)

O Erro Máximo ($E_{máx}$) expressa a faixa onde espera-se esteja contido o erro máximo (em termos absolutos) do SM, considerando toda a sua faixa de medição e as condições operacionais fixadas pelo seu fabricante. O termo *precisão*, embora não recomendado, tem sido usado como sinônimo de incerteza do sistema de medição.
O erro máximo define uma faixa simétrica em relação ao zero que inscreve totalmente a curva de erros de um SM. O erro máximo de um SM é o parâmetro reduzido que melhor descreve a qualidade do instrumento.

### 3.4.13. Sensibilidade (Sb)

É o quociente entre a variação da resposta (sinal de saída) do SM e a correspondente variação do estímulo (mensurando). Para sistemas lineares a sensibilidade é constante e para os não lineares é variável, dependendo do valor do estímulo e determinada pelo coeficiente angular da tangente à CRr (fig. 3.7). Nos instrumentos com indicador de ponteiro às vezes se estabelece a sensibilidade como sendo a relação entre o deslocamento da extremidade do ponteiro (em mm) e o valor unitário do mensurando.

### 3.4.14. Estabilidade da Sensibilidade (ESb)

Em função da variação das condições ambientais e de outros fatores no decorrer do tempo, podem ocorrer alterações na sensibilidade de um SM. O parâmetro que descreve esta variação é a chamada *estabilidade da sensibilidade* (ESb). Exemplo: um dinamômetro poderá apresentar variação de sensibilidade em função da temperatura (variação do módulo de elasticidade), podendo-se expressar esta característica como:
ESb = ± 0,5 (div/N)/K
ou seja, a sensibilidade pode variar de até ± 0,5 div/N por cada kelvin de variação na temperatura.

### 3.4.15. Estabilidade do Zero (Ez)

Podem ocorrer, em função dos mesmos fatores mencionados no item anterior, instabilidades no comportamento de um SM que se manifestam como alteração do valor inicial da escala (zero). O parâmetro *estabilidade do zero* (Ez) é empregado para descrever os limites máximos para esta instabilidade em função de uma grandeza de influência (tempo, temperatura, etc). Correspondem a deslocamentos paralelos da CRr.
Exemplo: Um milivoltímetro pode apresentar tensões superpostas ao sinal de medição em função da temperatura (tensões termelétricas). Isto pode ser caracterizado por:
Ez = ± 0,08 mV/K
ou seja, pode ocorrer um deslocamento paralelo da CRr (erro de zero) de até ± 0.08 mV por cada kelvin de variação da temperatura.

### 3.4.16. Histerese (H)

Histerese de um SM é um erro de medição que ocorre quando há diferença entre a indicação para um dado valor do mensurando quando este foi atingido por valores crescentes e a indicação quando o mensurando é atingido por valores decrescentes (fig. 3.8). Este valor poderá ser diferente se o ciclo de carregamento e descarregamento for completo ou parcial. A histerese é um fenômeno bastante típico nos instrumentos mecânicos, tendo como fonte de erro, principalmente, folgas e deformações associadas ao atrito.

### 3.4.17. Erro de Linearidade (EL)

A grande maioria dos SM apresenta um CRn linear, isto é, seu gráfico é uma reta. Entretanto, o CRr pode afastar-se deste comportamento ideal. O erro de linearidade é um parâmetro que exprime o quanto o CRr afasta-se de uma reta.
Não existe um procedimento único para a determinação do erro de linearidade. Embora estes erros sejam sempre expressos em relação a uma reta de referência, os critérios para a eleição desta reta de referência, não é único. Na figura 3.9 são apresentadas três formas de determinação do erro de linearidade:

- *terminal* (ELt): a reta de referência é estabelecida pela reta que une o ponto inicial e o final da linha média da característica de resposta real;
- *independente* (ELi): à curva de erros sistemáticos são ajustadas duas retas paralelas, de forma que a faixa definida pelas retas contenha todos os pontos da curva e que a distância entre as mesmas seja mínima. O erro de linearidade corresponde à metade do valor correspondente à distância entre estas retas.
- *método dos mínimos quadrados* (ELq): a posição da reta de referência é calculada pelo método dos mínimos quadrados. O maior afastamento da curva de erros sistemáticos à reta de regressão estabelece o erro de linearidade. Os coeficientes da reta de regressão y = ax + b são calculados pelas equações abaixo:

$$a = \frac{n\,\sum(x_i\ y_i) - \sum x_i . \sum y_i}{n\,\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\text{e} \qquad (5.1)$$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}$$

onde n é o número de pontos coordenados ($x_i$, $y_i$), sendo que em cada somatório i varia de 1 a n
O erro de linearidade usando o método dos mínimos quadrados tem sido muito empregado em função de sua determinação poder ser efetuada de forma automática por algoritmos de programação relativamente simples.

### 3.5. *Representação Absoluta Versus Relativa*

A apresentação dos parâmetros que descrevem as características dos sistemas de medição pode ser dada em termos absolutos ou relativos. Parâmetros expressos em termos relativos são denominados de *erros fiduciais*. Parâmetros em termos relativos facilitam a comparação da qualidade de diferentes SM.

#### 3.5.1. Apresentação em termos absolutos:

O valor é apresentado na unidade do mensurando. Exemplos:

erro de medição: E = + 0,038 N para I = 15,93 N
erro máximo do SM: $E_{máx}$ = ± 0,003 V
repetitividade (95%) = ± 1,5 K

#### 3.5.2. Apresentação em termos relativos (erro fiducial):

O parâmetro é apresentado como um percentual de um valor de referência, ou valor fiducial. Como valor fiducial são tomados preferencialmente:

a) Erro fiducial em relação ao *valor final de escala* (VFE):[i]
Aplicado normalmente a manômetros, voltímetros, etc. Exemplos:

$E_{máx}$ = ± 1% do VFE
Re (95) = ± 0,1%

b) Erro fiducial em relação a *faixa de indicação* (ou amplitude da faixa de indicação):
Aplicado normalmente a termômetros, pirômetros, barômetros, e outros SM com unidades não absolutas. Exemplos:

$I_{SM}$ = ± 0,2 % da FM

erro de linearidade: ELq = 1% na faixa de 900 a 1400 mbar

c) Erro fiducial em relação a um *valor prefixado*:
Aplicado quando o instrumento é destinado a medir variações em torno do valor pré fixado. Exemplo:

Re (95) = ± 0,5% da pressão nominal de operação de 18,5 bar

d) Erro fiducial em relação ao *valor verdadeiro convencional*:
Aplicado quando se trata de medidas materializadas . Exemplo:

erro admissível da massa padrão de 100 mg = ± 0,2%

NOTA: Quando o valor de referência é o valor verdadeiro convencional (ou valor medido), este também pode ser chamado de *erro relativo.*

---

[i] Quando não explicitado, o valor de referência é sempre o VFE

# Capítulo 4

# O ERRO DE MEDIÇÃO

### *4.1. A Convivência com o Erro*

O erro de medição é caracterizado como a diferença entre o valor da indicação do SM e o valor verdadeiro o mensurando, isto é:

$$E = I - VV \tag{4.1}$$

ondeE = erro de medição
I = indicação
VV = valor verdadeiro

Na prática, o valor "verdadeiro" é desconhecido. Usa-se então o chamado *valor verdadeiro convencional* (VVC), isto é, o valor conhecido com erros não superiores a um décimo do erro de medição esperado. Neste caso, o erro de medição é calculado por:

$$E = I - VVC \tag{4.2}$$

ondeVVC = valor verdadeiro convencional

Para eliminar totalmente o erro de medição é necessário empregar um SM perfeito sobre o mensurando, sendo este perfeitamente definido e estável. Na prática não se consegue um SM perfeito e o mensurando pode apresentar variações. Portanto, é impossível eliminar completamente o erro de medição. Mas é possível, ao menos, delimitá-lo.

Mesmo sabendo-se da existência do erro de medição, é ainda possível obter informações confiáveis da medição, desde que a ordem de grandeza e a natureza deste erro sejam conhecidas.

$$E = Es + Ea + Eg \tag{4.3}$$

### *4.2. Tipos de Erros*

Para fins de melhor entendimento, o erro de medição pode ser considerado como composto de três parcelas aditivas:

sendo

E = erro de medição
Es = erro sistemático
Ea = erro aleatório
Eg = erro grosseiro

### 4.2.1. O erro sistemático

O *erro sistemático* (Es): é a parcela de erro sempre presente nas medições realizadas em idênticas condições de operação. Um dispositivo mostrador com seu ponteiro "torto" é um exemplo clássico de erro sistemático, que sempre se repetirá enquanto o ponteiro estiver torto.

Pode tanto ser causado por um problema de ajuste ou desgaste do sistema de medição, quanto por fatores construtivos. Pode estar associado ao próprio princípio de medição empregado ou ainda ser influenciado por grandezas ou fatores externos, como as condições ambientais.

O erro sistemático da indicação de um instrumento de medição é também denominado *Tendência* (Td).

O erro sistemático, embora se repita se a medição for realizada em idênticas condições, geralmente não é constante ao longo de toda a faixa em que o SM pode medir. Para cada valor distinto do mensurando é possível ter um valor diferente para o erro sistemático. A forma como este varia ao longo da faixa de medição depende de cada SM, sendo de difícil previsão.

### 4.2.2. O erro aleatório

Quando uma medição é repetida diversas vezes, nas mesmas condições, observam-se variações nos valores obtidos. Em relação ao valor médio, nota-se que estas variações ocorrem de forma imprevisível, tanto para valores acima do valor médio, quanto para abaixo. Este efeito é provocado pelo *erro aleatório* (Ea).

Diversos fatores contribuem para o surgimento do erro aleatório. A existência de folgas, atrito, vibrações, flutuações de tensão elétrica, instabilidades internas, das condições ambientais ou outras grandezas de influência, contribui para o aparecimento deste tipo de erro.

A intensidade do erro aleatório de um mesmo SM pode variar ao longo da sua faixa de medição, com o tempo, com as variações das grandezas de influência, dentre outros fatores. A forma como o erro aleatório se manifesta ao longo da faixa de medição depende de cada SM, sendo de difícil previsão.

### 4.2.3. O erro grosseiro

O *erro grosseiro* (Eg) é, geralmente, decorrente de mau uso ou mau funcionamento do SM. Pode, por exemplo, ocorrer em função de leitura errônea, operação indevida ou dano do SM. Seu valor é totalmente imprevisível, porém geralmente sua existência é facilmente detectável. Sua aparição pode ser resumida a casos muito exporádicos, desde que o trabalho de medição seja feito com consciência. Seu valor será considerado nulo neste texto.

### 4.2.4. Exemplo

A figura 4.1 exemplifica uma situação onde é possível caracterizar erros sistemáticos e aleatórios. A pontaria de quatro tanques de guerra está sendo colocada à prova. O objetivo é acertar os projéteis no centro do alvo colocado a uma mesma distância. Cada tanque tem direito a 15 tiros. Os resultados da prova de tiro dos tanques A, B, C, e D estão mostrados nesta mesma figura.

As marcas dos tiros do tanque "A" se espalharam por uma área relativamente grande em torno do centro do alvo. Estas marcas podem ser inscritas dentro do círculo tracejado desenhado na figura. Embora este círculo apresente um raio relativamente grande, seu centro coincide aproximadamente com o centro do alvo. O raio do círculo tracejado está associado ao espalhamento dos tiros que decorre diretamente do erro aleatório. A posição média das marcas dos tiros, que coincide aproximadamente com a posição do centro do círculo tracejado, reflete a influência do erro sistemático. Pode-se então afirmar que o tanque "A" apresenta elevado nível de erros aleatórios enquanto o erro sistemático é baixo.

No caso do tanque "B", além do raio do círculo tracejado ser grande, seu centro está distante do centro do alvo. Neste caso, tanto os erros aleatórios quanto sistemáticos são grandes. Na condição do tanque "C", a dispersão é muito menor, mas a posição do centro do círculo tracejado está ainda distante do centro do alvo, o que indica reduzidos erros aleatórios e grande erro sistemático. Já a situação do tanque "D" reflete reduzidos níveis de erros aleatórios e também do erro sistemático.

Obviamente que, do ponto de vista de balística, o melhor dos tanques é o tanque "D", por acertar quase sempre muito próximo do centro do alvo com boa repetitividade. Ao se comparar os resultados do tanque "C" com o "A", pode-se afirmar que o tanque "C" é melhor. Embora nenhum dos tiros disparados pelo tanque "C" tenha se aproximado suficientemente do centro do alvo, o seu espalhamento é muito menor. Um pequeno ajuste na mira do tanque "C" o trará para uma condição de operação muito próxima do tanque "D", o que jamais pode ser obtido com o tanque "A".

Tanto no exemplo da figura 4.1, quanto em problemas de medição, o erro sistemático não é um fator tão crítico quanto o erro aleatório. Através de um procedimento adequado é possível estimá-lo relativamente bem e efetuar a sua compensação, o que eqüivale ao ajuste da mira do tanque "C" da figura 4.1. Já o erro aleatório não pode ser compensado embora sua influência sobre o valor médio obtido por meio de várias repetições se reduza na proporção de $1/\sqrt{n}$, onde "n" é o número de repetições considerado na média. A seguir são apresentados procedimentos para a estimativa quantitativa dos erros de medição.

## *4.3. Estimação dos Erros de Medição*

Se o erro de medição fosse perfeitamente conhecido, este poderia ser corrigido e sua influência completamente anulada da medição. A componente sistemática do erro de medição pode ser suficientemente bem estimada, porém não a componente aleatória. Assim, não é possível compensar totalmente o erro.

O conhecimento aproximado do erro sistemático e a caracterização da parcela aleatória é sempre desejável, pois isto torna possível sua correção parcial e a delimitação da faixa de incerteza ainda presente no resultado de uma medição. A forma de estimação destes erros é apresentada a seguir:

### 4.3.1. Erro sistemático/Tendência/Correção

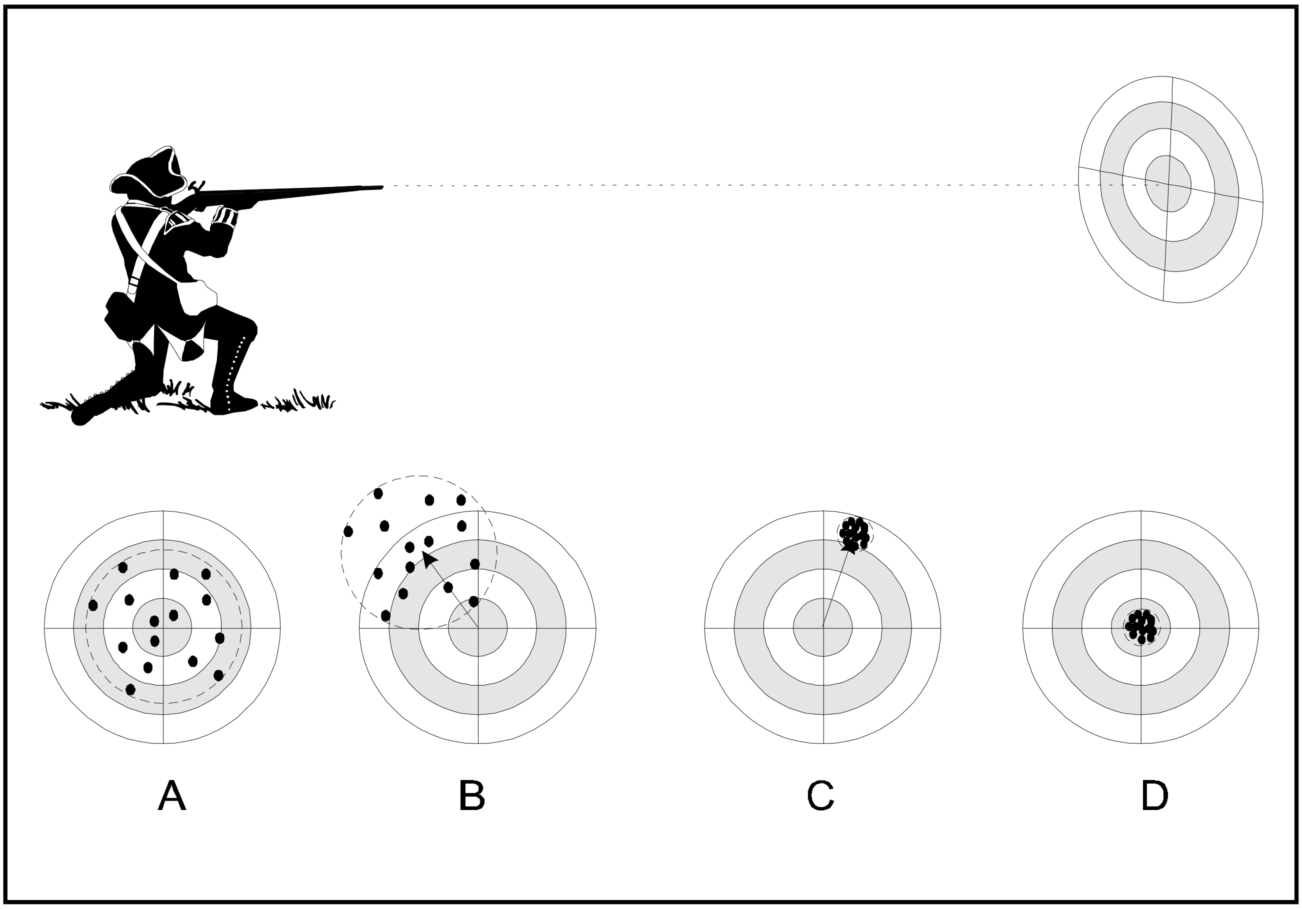
O erro determinado pela equação (4.2) contém intrinsecamente as parcelas sistemática e aleatória. Nota-se que, quando a medição é repetida várias vezes, o erro aleatório assume tanto valores positivos quanto negativos. De fato, geralmente, o erro aleatório pode ser modelado como tendo distribuição aproximadamente normal com média zero. Na prática, sua média tende a zero à medida que aumenta-se o número de dados observados, uma vez que este tende a distribuir-se simetricamente em valores positivos e negativos.

Desconsiderando o erro grosseiro, e assumindo que um número suficientemente grande de medições foi

$$Es = MI - VVC \tag{4.4}$$

efetuado, a influência do erro aleatório no valor médio das medições tende a ser desprezável. Sendo assim, o valor médio de um número grande de medidas efetuadas repetidamente estará predominantemente afetado pelo erro sistemático. Logo, para um dado valor do mensurando, o Es poderia ser determinado pela equação (4.4), se fosse considerando um número infinito de medições:

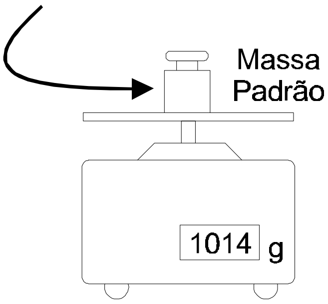
onde




AAG - 11/97 - MCG 011

Figura 4.1 - Caracterização de Efeitos Sistemáticos e Aleatórios em um Problema de Balística

( 1,00000 ± 0,00001 ) kg




a) Primeira medição:

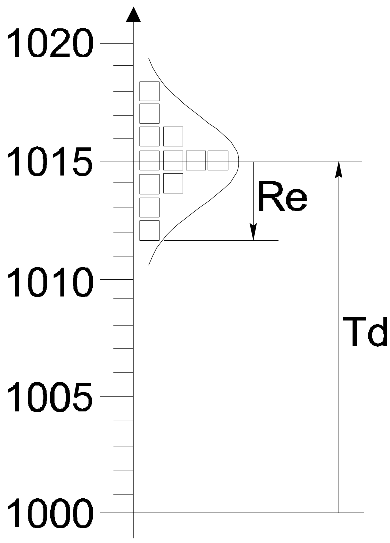
Id : 1014g
I : 1014 g
E = 1014 - 1000
E = + 14 g

b) Comportamento observado em medições subseqüentes

| Indic | E | Td | Ea |
|---|---|---|---|
| 1014 | 14 | 15 | -1 |
| 1015 | 15 | 15 | 0 |
| 1018 | 18 | 15 | +3 |
| 1015 | 15 | 15 | 0 |
| 1013 | 13 | 15 | -2 |
| 1016 | 16 | 15 | +1 |
| 1017 | 17 | 15 | +2 |
| 1014 | 14 | 15 | -1 |
| 1015 | 15 | 15 | 0 |
| 1016 | 16 | 15 | +1 |
| 1012 | 12 | 15 | -3 |
| 1015 | 15 | 15 | 0 |

| Média: | | | |
|---|---|---|---|
| 1015 | 15 | 15 | 0 |

c) Análise de distribuição




CAF - 07/98 AM 068

Figura 4.2 - Tendência e Repetitividade

Es = erro sistemático

MI = média de infinitas indicações do SM
VVC = valor verdadeiro convencional

Na prática não se dispõe de infinitas medições para determinar o erro sistemático de um SM, porém sim um número restrito de medições, geralmente obtidas na calibração do instrumento. Ainda assim, a equação (4.4) pode ser usada para obter uma estimativa do erro sistemático. Define-se então o parâmetro *Tendência (Td)*, como sendo a estimativa do erro sistemático, obtida a partir de um número finito de medições, ou seja:
Td = MI - VVC (4.4a)
No limite, quando o número de medidas tende a infinito, a tendência aproxima-se do valor do erro sistemático.

Alternativamente o parâmetro *correção (C)* pode ser usado para exprimir uma estimativa do erro sistemático. A correção é numericamente igual à tendência, porém seu sinal é invertido, isto é:
C = - Td (4.4b)
O termo "correção" lembra a sua utilização típica, quando, normalmente, é adicionado à indicação para "corrigir" os efeitos do erro sistemático. A correção é mais freqüentemente utilizado em certificados de calibração.

Nota: A estimativa do erro sistemático através da *tendência* (ou da *correção)* envolve uma faixa de incertezas que é função do número de medições repetidas e das incertezas do padrão utilizado como VVC (vide Anexo III).

### 4.3.2. Erro aleatório

O erro aleatório distribui-se em torno do valor médio das indicações. É possível isolar seu valor individual para uma determinada medição através da seguinte equação:

$$Ea_i = I_i - MI$$

onde
$Ea_i$ = erro aleatório da i-ésima indicação
$I_i$ = valor da i-ésima indicação individual
MI = média das indicações

Esta expressão pode ser obtida por substituição da equação (4.4) na (4.3) se o erro grosseiro for desconsiderado. Este erro varia a cada medição de forma totalmente imprevisível. O valor instantâneo do erro aleatório tem pouco ou nenhum sentido prático, uma vez que é sempre variável e imprevisível.

A caracterização do erro aleatório é efetuada através de procedimentos estatísticos. Sobre um conjunto finito de valores de indicações obtidas nas mesmas condições e do mesmo mensurando, determina-se o *desvio padrão experimental*, que, de certa forma, está associado à dispersão provocada pelo erro aleatório.

É comum exprimir de forma quantitativa o erro aleatório através da *repetitividade* (Re). A repetitividade de um instrumento de medição expressa uma faixa simétrica de valores dentro da qual, com uma probabilidade estatisticamente definida, se situa o erro aleatório da indicação. Para estimar este parâmetro, é necessário multiplicar o desvio padrão experimental pelo correspondente coeficiente "t" de Student, levando em conta a probabilidade de enquadramento desejada e o número de dados envolvidos.

$$Re = \pm t \cdot s \qquad (4.6)$$

onde:

Re = faixa de dispersão dentro da qual se situa o erro aleatório (normalmente para probabilidade de 95%)
t = é o coeficiente “t” de Student
s = desvio padrão experimental da amostra de n medidas

Os procedimentos para a determinação do coeficiente “t” de Student, e estimação do desvio padrão da amostra "s" e da repetitividade (Re) são detalhados no anexo III.

### 4.3.3. Exemplo de determinação da Tendência e Repetitividade

A figura 4.2 apresenta um exemplo onde são estimados os erros de uma balança eletrônica digital. Para tal, uma massa padrão de 1.00000 ± 0.00001 kg é medida várias vezes por esta balança. Sabe-se de antemão que o valor do erro da massa padrão é desprezável em relação aos erros tipicamente esperados para esta balança. Neste caso, o valor desta massa pode ser assumido como o valor verdadeiro convencional (VVC) do mensurando. Note que a determinação dos erros de um SM só é possível quando se mede um mensurando já previamente conhecido, isto é, apenas quando o VVC é conhecido.

A primeira indicação obtida é 1014 g, que difere do valor verdadeiro convencional 1000 g. Nota-se a existência de um erro de medição de E = 1014 - 1000 = + 14 g. Entretanto, ao medir-se uma única vez não é possível identificar as componentes dos erros sistemático e aleatório. Os valores das indicações obtidas nas onze medições adicionais apresentaram variações. Como trata-se de um mensurando invariável, a dispersão dos valores das indicações é atribuída aos efeitos dos erros aleatórios do sistema de medição. A distribuição dos valores das indicações obtidas, mostrada na parte "c" da figura, agrupa-se em torno do valor central médio de 1015 g e tem uma forma que se assemelha a uma distribuição normal (anexo III). Por observação direta nota-se que os valores das doze indicações estão enquadradas dentro da faixa de 1015 ± 3 g.

A tendência e o desvio padrão experimental foram estimados com o auxílio da tabela da figura 4.2b. O valor médio das indicações foi determinado (MI = 1015 g) e com este a tendência foi estimada por meio da equação (4.4a), sendo obtido:

$$Td = 1015 - 1000 \text{ g}$$
$$Td = 15 \text{ g}$$ [ii]

A quarta coluna da figura 4.2b é obtida subtraindo-se o valor da tendência do erro total (E), resultando no erro aleatório para cada ponto. Nota-se que, neste caso, este erro distribui-se aleatoriamente em torno do zero dentro do limite ± 3 g.

A aplicação da equação III.8 (ver apêndice III) leva ao seguinte valor para o desvio padrão experimental:

$$s = 1{,}65 \text{ g}$$

O coeficiente t de Student para 12 medidas, portanto 11 graus de liberdade, e confiabilidade 95% é de 2,20 (fig. III.5). Logo, a repetitividade (Re), dentro da qual situa-se o erro aleatório, resulta em:

$$Re = \pm (2{,}20 \cdot 1{,}65) \text{ g}$$
$$Re = \pm 3{,}6 \text{ g}$$

Isto quer dizer que existe 95% de probabilidade do erro aleatório se enquadrar dentro de uma faixa simétrica de ± 3,6 g centrada em torno do valor médio 1015g.

***observação**:*

---

[ii] Considerando a equação III.10, a rigor pode-se afirmar apenas que a tendência situa-se dentro da faixa Td = 15 ± 1 g.

Caso o valor real da massa aplicada à balança fosse desconhecido, o leigo muito provavelmente afirmaria, após o experimento, que o valor da mesma é:

$$m = (1014 \pm 3)\ g$$

Ao fazer isto ele estaria cometendo um grave erro, pelo fato de não considerar a existência do erro sistemático. A forma correta da determinação do *resultado da medição* (RM) será exposta no capítulo 7, porém, pode-se adiantar que, desconsiderando as demais parcelas de incerteza, o RM poderia ser expresso por:

$$RM = MI - Td \pm \frac{Re}{\sqrt{n}}$$

onde:

MI = valor médio das indicações
Td = tendência
Re = repetitividade
n = número de medidas efetuadas

que leva a:

$$RM = (1000 \pm 1)\ g$$

### 4.3.4. Curva de erros de um sistema de medição

Os valores estimados para a tendência e repetitividade de um sistema de medição normalmente são obtidos não apenas em um ponto, mas são repetidos para vários pontos ao longo da sua faixa de medição. Estes valores podem ser representados graficamente, facilitando a visualização do comportamento metrológico do SM nas condições em que estas estimativas foram obtidas. O gráfico resultante é denominado de *curva de erros*.

O procedimento efetuado no exemplo da figura 4.2 é repetido para valores adicionais de massas cujos valores verdadeiros convencionais sejam conhecidos (massas padrão). Costuma-se selecionar dentro da faixa de medição do SM um número limitado de pontos, normalmente regularmente espaçados, e estimar o Td e Re para cada um destes pontos. Tipicamente são usados em torno de 10 pontos na faixa de medição.

Como resultado do procedimento acima, uma representação gráfica de como a tendência e a repetitividade se comportam em alguns pontos ao longo da faixa de medição. Esta é a curva de erros do SM. Para cada ponto medido, a tendência é representada pelo ponto central ao qual adiciona-se e subtrai-se a repetitividade. Caracteriza-se assim a faixa de valores dentro da qual estima-se que o erro do SM estará para aquele ponto de medição. Na prática, este levantamento é muito importante para a correta compensação de erros e estimação do denominado resultado de uma medição, como será visto em detalhes no capítulo 7.

A figura 4.3 apresenta um exemplo de determinação da curva de erros: Para a mesma balança da figura 4.2, repetiu-se o procedimento para a estimação de Td e Re quando foram utilizados valores adicionais de massas padrão, cada qual com seu valor verdadeiro convencional conhecido. Os valores obtidos estão tabelados na figura 4.3a. A representação gráfica destes erros, ou seja a curva de erros, é também mostrada. No eixo horizontal representa-se o valor da indicação. No eixo vertical, o erro de medição, sendo que o ponto central representa a tendência (Td) e, em torno desta, traçam-se os limites esperados para o erro aleatório estimados por:

limite superior: Td + Re
limite inferior: Td - Re

#### 4.3.5. Erro Máximo do Sistema de Medição

O fabricante de um sistema de medição normalmente especifica um parâmetro que corresponde ao limite dos máximos erros presentes neste SM quando este é utilizado nas condições típicas de operação. Este parâmetro deve ser usado com muito cuidado, verificando-se que não são violadas as condições especificadas pelo fabricante nem as recomendações a nível operacional e de manutenção.

Define-se o parâmetro denominado *erro máximo* ($E_{max}$) de um sistema de medição como a faixa de valores, centrada em torno do zero, que, com uma probabilidade definida, contém o maior erro do qual pode estar afetada qualquer indicação apresentada pelo sistema de medição, considerando os erros sistemáticos e aleatórios em toda a sua faixa de medição, sempre respeitando as condições de operação especificadas pelo seu fabricante. Note que este é um parâmetro característico do sistema de medição e não de um processo de medição em particular.

Nas condições de operação, os erros apresentados pelo sistema de medição não deverão ultrapassar os limites definidos por - $E_{máx}$ e + $E_{máx}$. Sua curva de erros deve estar inteiramente inscrita dentro do espaço definido por duas linhas horizontais localizadas em - $E_{máx}$ e + $E_{máx}$.

O erro máximo do sistema de medição é o parâmetro reduzido que melhor descreve a qualidade do instrumento, pois expressa os limites máximos do erro de medição associado a este SM nas suas condições normais de operação e por isso é freqüentemente utilizado na etapa de seleção do SM. O termo *precisão* é freqüente e erroneamente empregado em lugar do erro máximo. O uso do termo precisão pode ser empregado apenas no sentido qualitativo e jamais como um parâmetro

### *4.4. Incerteza*

A palavra “incerteza” significa “dúvida”. De forma ampla “incerteza da medição” significa “dúvida acerca do resultado de uma medição”. Formalmente, define-se incerteza como: “parâmetro, associado com o resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão de valores que podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando”.

A incerteza, portanto, está associada ao resultado da medição. Não corresponde ao erro aleatório do sistema de medição, embora este seja uma das suas componentes. Outras componentes são decorrentes da ação de grandezas de influência sobre o processo de medição, as incertezas da tendência (ou da correção), número de medições efetuadas, resolução limitada, etc. Não há, portanto, uma relação matemática explícita entre a incerteza de um processo de medição e a repetitividade de um sistema de medição.

A incerteza é normalmente expressa em termos da *incerteza padrão*, da *incerteza combinada* ou da *incerteza expandida*. A *incerteza padrão (u)* de um dado efeito aleatório corresponde à estimativa equivalente a um desvio padrão da ação deste efeito sobre a indicação. A *incerteza combinada (uc)* de um processo de medição é estimada considerando a ação simultânea de todas as fontes de incerteza e ainda corresponde a um desvio padrão da distribuição resultante. A *incerteza expandida (U)* associada a um processo de medição é estimada a partir da incerteza combinada multiplicada pelo coeficiente t-Student apropriado e reflete a faixa de dúvidas ainda presente nesta medição para uma probabilidade de enquadramento definida, geralmente de 95%. A estimativa da incerteza envolve considerações adicionais e será abordada em detalhes no capítulo 5.

### *4.5. Fontes de Erros*

Toda medição está afetada por erros. Estes erros são provocados pela ação isolada ou combinada de vários fatores que influenciam sobre o processo de medição, envolvendo o sistema de medição, o procedimento de medição, a ação de grandezas de influência e o operador.

O comportamento metrológico do SM depende fortemente de fatores conceituais e aspectos construtivos. Suas características tendem a se degradar com o uso, especialmente em condições de utilização muito severas. O comportamento do SM pode ser fortemente influenciado por perturbações externas e internas, bem como pela influência do operador, ou mesmo do SM, modificar indevidamente o mensurando (fig. 4.3).

O procedimento de medição adotado deve ser compatível com as características do mensurando. O número e posição das medições efetuadas, o modelo de cálculo adotado, a interpretação dos resultados obtidos podem também introduzir componentes de incerteza relevantes no resultado da medição.

As grandezas de influência externas podem provocar erros alterando diretamente o comportamento do SM ou agindo sobre o mensurando. O elemento perturbador mais crítico, de modo geral, é a variação da temperatura ambiente, embora outras grandezas como vibrações mecânicas, variações de pressão atmosférica, umidade ou tensão da rede elétrica, também possam trazer alguma influência. A variação da temperatura provoca dilatação das escalas dos instrumentos de medição de comprimentos, da mesma forma como age sobre o mensurando, por exemplo, modificando o comprimento a medir de uma peça.

A variação da temperatura pode também ser uma perturbação interna. Exemplo típico é a instabilidade dos sistemas elétricos de medição, por determinado espaço de tempo, após terem sido ligados. Em função da liberação de calor nos circuitos elétrico/eletrônicos há uma variação das características elétricas de alguns componentes e assim do SM. Há necessidade de aguardar estabilização térmica, o que minimizará os efeitos da temperatura. A existência de atrito, folgas, imperfeições construtivas e o comportamento não ideal de elementos físicos são outros exemplos de perturbação interna.

A modificação indevida do mensurando pela ação do sistema de medição, ou do operador, pode ter diversas causas. Por exemplo, na metrologia dimensional, a dimensão da peça modifica-se em função da força de medição aplicada. A figura 4.5 ilustra uma situação onde pretende-se medir a temperatura de um cafezinho. Para tal é empregado um termômetro de bulbo. Ao ser inserido no copo, há um fluxo de energia do café para o termômetro: o bulbo esquenta enquanto o café esfria, até que a temperatura de equilíbrio seja atingida. É esta temperatura, inferior a temperatura inicial do cafezinho, que será indicada pelo termômetro. Este é outro exemplo onde o mensurando é modificado pelo SM.

A modificação do mensurando por outros módulos da cadeia de medição, acontece, por exemplo, na conexão indevida de dispositivos registradores. Um exemplo onde o operador modifica o mensurando é quando se instala um termômetro para medir a temperatura no interior de uma câmara frigorífica e, por alguma razão, torna-se necessário entrar nesta câmara para fazer a leitura da temperatura. A presença do operador pode modificar o mensurando, no caso, a temperatura da câmara.

A figura 4.6 exemplifica a ocorrência de erros numa operação de medição de massa. Destaca-se na figura que o comportamento da balança, e, conseqüentemente, os erros de medição, são dependentes da temperatura ambiente e da sua variação. Dependendo da forma como se comporta a temperatura, a balança pode apresentar predominância de erros sistemáticos ou aleatórios.

O operador também pode introduzir erros adicionais no processo de medição. Erros de interpolação na leitura, erros inerentes ao manuseio ou à aplicação irregular do SM são exemplos típicos. Sua quantificação é muito difícil, geralmente estimada por medições repetitivas em uma peça de referência, envolvendo diferentes momentos, instrumentos, operadores e nas condições ambientais típicas.

A grande dificuldade trazida por estes diversos fatores é que estas perturbações ocorrem superpostas ao sinal de medição, sendo impossível identificar e separar o que é erro do que é variação do mensurando. Para conviver com estes diversos fatores que influenciam o comportamento do SM, é comum ao fabricante fixar as condições em que o sistema de medição deve operar, por exemplo, temperatura 20 ± 1 °C, tensão da rede 220 ± 15 V, etc. Somente dentro destas faixas é que são garantidas as especificações metrológicas dos sistemas de medição. É necessário estar atento para estes limitantes.

## *4.6. Minimização do Erro de Medição*

O erro de medição sempre existe. Não há meio de eliminá-lo completamente. No capítulo 7 são abordados os mecanismos para estabelecer os limites da sua influência no resultado da medição. Entretanto, existem alguns cuidados e procedimentos que podem ser seguidos que resultam na minimização deste erro. A seguir são apresentadas algumas sugestões nesta direção:

### 4.6.1. Modelação correta do processo de medição

Um fator de elevada importância é o conhecimento da natureza do processo ou da grandeza que está sendo medida. A correta definição do mensurando, a compreensão de suas características e comportamento devem ser levadas em conta para definir o procedimento de medição a ser adotado. Se, por exemplo, a medição envolve um mensurando variável com o tempo ou posição, a adoção de um procedimento errôneo - apenas adequado para mensurandos invariáveis - poderá levar a resultados completamente absurdos.

### 4.6.2. Seleção correta do SM

Operacional e funcionalmente o SM deve ser apropriado para o tipo de mensurando. Deve-se verificar se o valor do mensurando situa-se dentro da faixa de medição do SM. O tipo de grandeza deve ser compatível com o SM: um micrômetro para dimensões externas não se aplica para dimensões internas. Além disso, deve-se ficar alerta para problemas relacionados com a modificação do mensurando provocado pelo SM: seria conveniente usar um SM com baixa "inércia" térmica para o exemplo da figura 4.5. O tipo de mensurando: estático ou dinâmico; a forma de operação/indicação: digital ou analógica; o método de medição: indicação ou compensação; o peso, o tamanho e a energia necessária, devem ser levados em conta ao se selecionar o SM. Uma boa lida nos catálogos e manuais de operação do SM é indispensável.

### 4.6.3. Adequação do Erro Máximo do Sistema de Medição

Embora um SM sempre apresente erro de medição, diferentes sistemas de medição podem apresentar diferentes níveis de erros. A qualidade de um SM está relacionada com o nível de erro por este

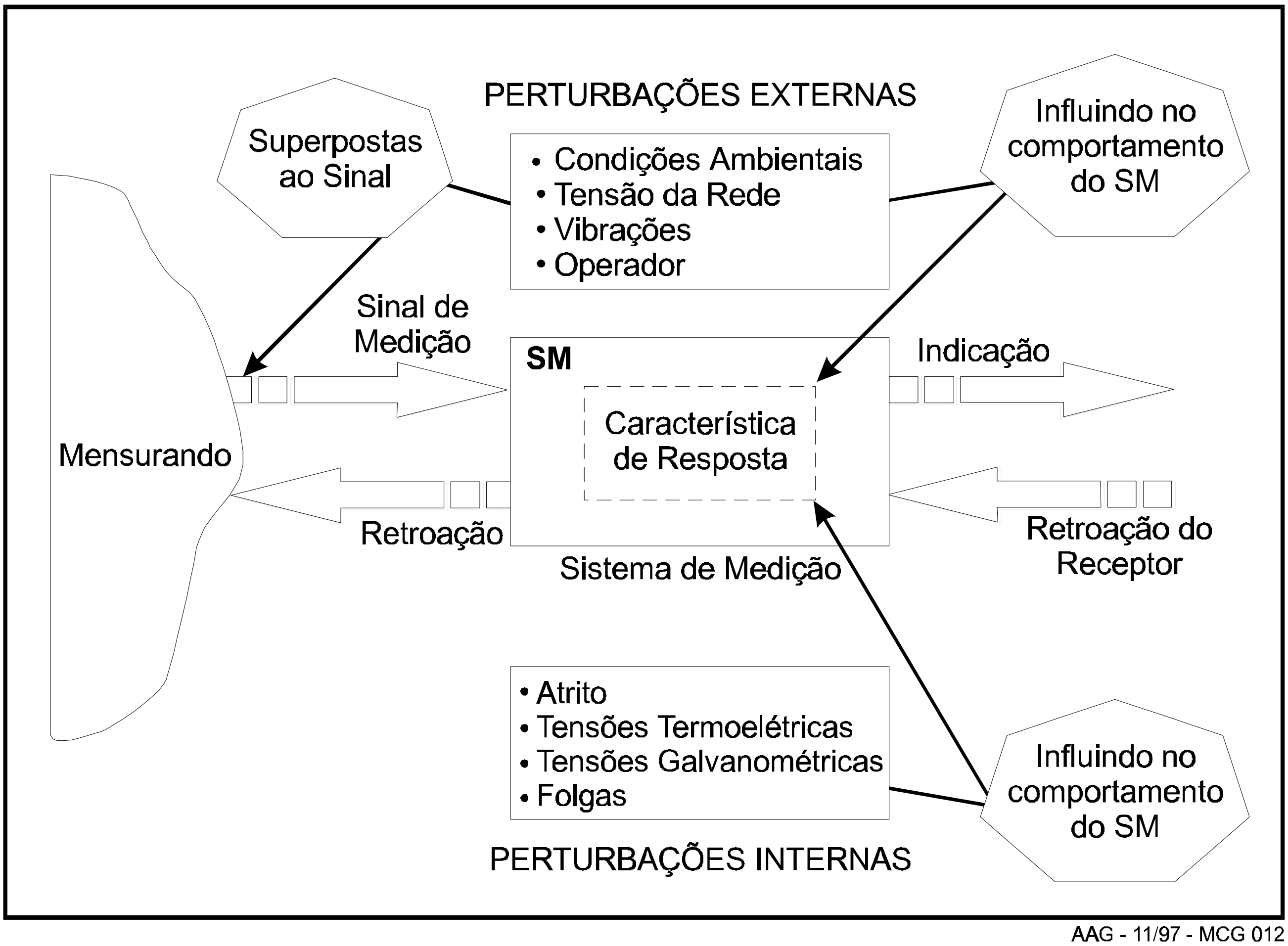



Figura 4.4 - Fontes de Erros de Medição

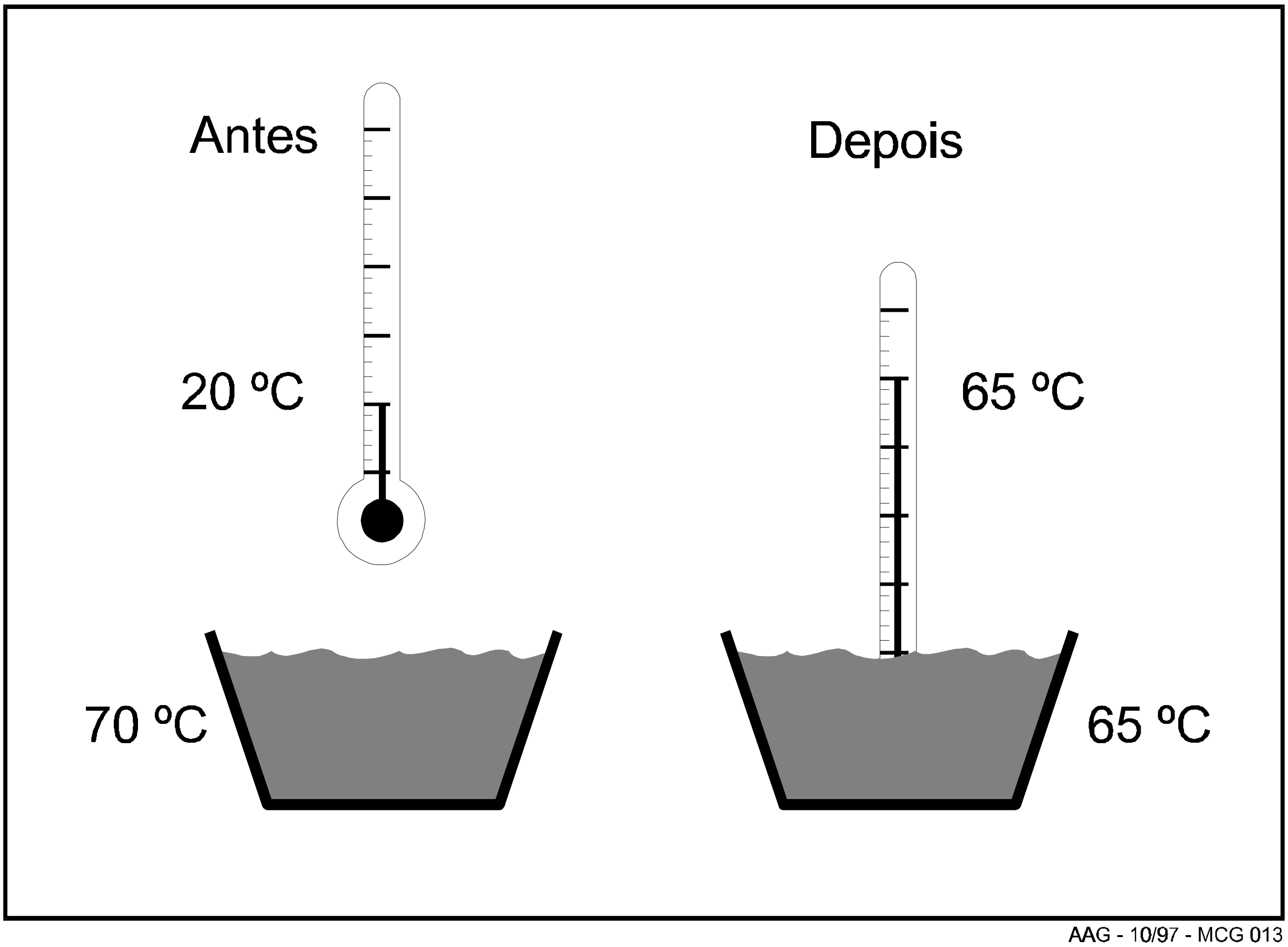



Figura 4.5 - Erro de Retroação do Sistema de Medição sobre o Mensurando

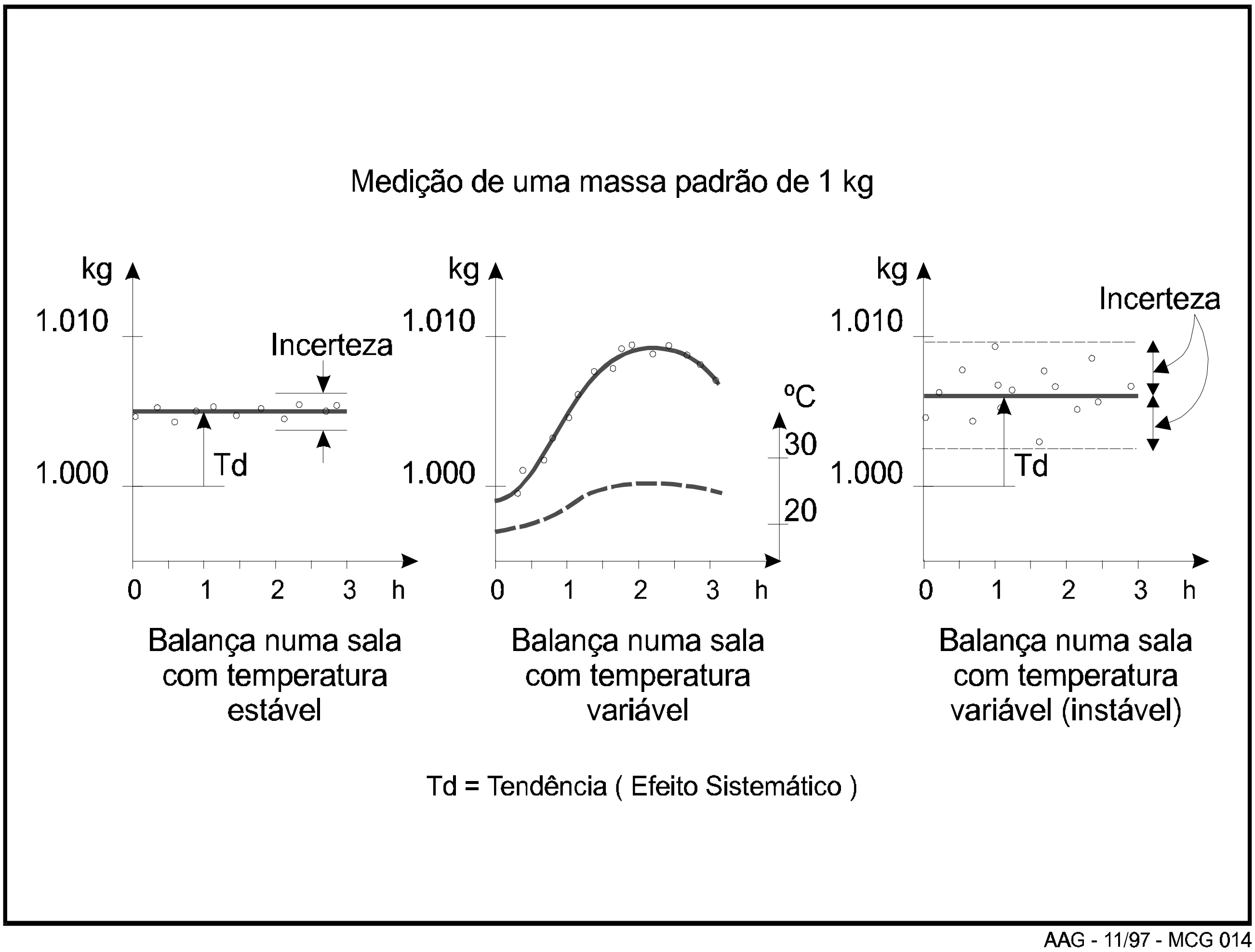



Figura 4.6 - Influência da Temperatura sobre os Efeitos Sistemáticos e Aleatórios

apresentado. É quase sempre possível adquirir no mercado SMs com diferentes níveis de qualidade por, obviamente, diferentes preços. O equilíbrio entre o custo e benefício deve ser buscado.

É difícil estabelecer um procedimento genérico para a correta seleção do SM baseado unicamente no seu preço e erro máximo. Porém, espera-se que, nas condições fixadas pelos fabricantes, os erros inerentes do sistema de medição nunca sejam superiores ao erro máximo do sistema de medição empregado. Através de uma *calibração*, e de um procedimento mais cuidadoso de medição, onde seja compensada a tendência do SM e a medição seja repetida diversas vezes, é possível reduzir significativamente o nível de erros presente no resultado.

### 4.6.4. Calibração do Sistema de Medição

O SM deve ser calibrado ou, ao menos, seus erros devem ser verificados em alguns pontos, quando se suspeitar que possa estar fora das condições normais de funcionamento ou vir a operar em condições adversas das especificadas pelo fabricante. Os erros de medição obtidos através da calibração são comparados com as especificações do SM dadas pelo fabricante, e ou com as características metrológicas requeridas na aplicação para a qual se destina este SM. Adicionalmente, a calibração fornece a tendência em alguns pontos da faixa de medição do SM, possibilitando a sua correção e conseqüente melhoria da incerteza da medição.

### 4.6.5. Avaliação das Influências das Condições de Operação do SM

Alguns SM's são sensíveis às condições de operação, podendo apresentar componentes adicionais de erros de medição em função das condições do ambiente. Deve-se prestar especial atenção nas variações de temperatura. Fortes campos elétricos ou magnéticos ou vibrações também podem afetar o desempenho do SM. A ordem de grandeza dos erros provocados por estes fatores deve ser avaliada e estes corrigidos quando significativos para a aplicação.

### 4.6.6. Calibração "in loco" do Sistema de Medição

Quando se suspeitar que existe forte influência de diversos fatores sobre o desempenho do SM, é recomendável efetuar a calibração deste SM "in loco", isto é, nas condições reais de utilização deste SM. Para tal, padrões do mensurando são aplicados sobre este SM e os erros são avaliados nas próprias condições de utilização.

***Problemas propostos***

1. Deduza a equação (4.5) a partir combinando as equações (4.2), (4.3) e (4.4), desconsiderando a existência do erro grosseiro
2. A tensão elétrica de uma pilha foi repetidamente medida por um voltímetro comprado no Paraguai. Foram obtidas as indicações listadas abaixo (todas em V). Determine o valor médio das indicações (MI) , o valor do erro aleatório para cada indicação, o desvio padrão experimental e a repetitividade (Re) para confiabilidade de 95%

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,47 | 1,43 | 1,40 | 1,44 | 1,44 | 1,48 | 1,42 | 1,45 | 1,46 | 1,43 |

3. A mesma pilha da questão anterior foi medida por um voltímetro de boa qualidade metrológica, sendo encontrado o seguinte resultado para a tensão da pilha: 1,4977 ±0,0005 V. Com este dado, determine a tendência (Td) para o voltímetro da questão anterior.
4. Uma dupla de operários foi encarregada de medir o diâmetro dos 10 cabos elétricos de uma torre de transmissão (desligada). Um dos operários subiu na torre e, com um paquímetro, mediu cada um dos cabos e "gritou" os valores para o segundo operário que anotou as medidas na planilha, obtendo os dados transcritos abaixo. Determine o valor médio para o diâmetro dos cabos e a repetitividade (Re) para 95% de confiabilidade.

| Indicações (mm) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25,2 | 25,9 | 24,8 | 24,6 | 225,1 |
| 24,7 | 25,6 | 25,3 | 24,9 | 25,0 |

5. E se for dito que o operário que subiu na torre era gago e o que anotou os dados estava com o óculos sujo, isto mudaria o seu resultado para a questão anterior ?
6. Pretende-se levantar dados acerca do comportamento metrológico de um dinamômetro. Um conjunto de 10 massas padrão foi usado para gerar forças conhecidas que foram aplicadas sobre o dinamômetro, abrangendo toda a sua faixa de medição que é de 100 N. Na tabela abaixo apresenta-se uma tabela com os resultados para cada uma das massas padrão. Represente graficamente a curva de erros deste dinamômetro.

| ponto de medição | VVC (N) | Td (N) | s (para n = 20) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 0,4 | 0,15 |
| 2 | 12,40 | 0,7 | 0,22 |
| 3 | 25,20 | 0,7 | 0,24 |
| 4 | 35,00 | 0,4 | 0,23 |
| 5 | 51,20 | 0,2 | 0,26 |
| 6 | 62,20 | -0,1 | 0,24 |
| 7 | 72,40 | -0,4 | 0,27 |
| 8 | 83,20 | -0,6 | 0,28 |
| 9 | 90,10 | -0,8 | 0,28 |
| 10 | 100,10 | -1,1 | 0,29 |

7. Determine o erro máximo (incerteza) do sistema de medição da questão anterior.

8. Dê exemplo de cinco fatores que possam introduzir erros em sistemas de medição.
9. Dê exemplo de procedimentos que podem ser efetuados para minimizar o erro de medição.

# Capítulo 5

# ESTIMATIVA DA INCERTEZA E CORREÇÃO EM MEDIÇÕES DIRETAS

Para estimar adequadamente a correção e as incertezas envolvidas em uma operação de medição é necessário caracterizar perfeitamente o *processo de medição*. Devem ser considerados, além do próprio sistema de medição e seus eventuais acessórios, o procedimento como as medições são efetuadas e os dados são tratados, a definição do mensurando e os princípios de medição envolvidos, a ação de grandezas de influência sobre o sistema de medição e/ou sobre o mensurando e a ação do operador, para citar os mais importantes. Cada um desses elementos acrescenta uma componente de incerteza ao resultado da medição e devem ser convenientemente considerados e combinados para que se obtenha uma estimativa realista da incerteza do processo de medição.

Neste texto, o termo *fonte de incerteza* é utilizado de forma genérica para referenciar qualquer fator cuja influência sobre a medição efetuada traga componentes aleatórias e/ou sistemáticas para o resultado da medição.

Este capítulo apresenta metodologia fortemente baseada no “Guia Para Expressão de Incertezas em Medições” ([1]), aqui denominado simplesmente de “o guia”, com a qual são estimadas e combinadas as contribuições sistemáticas e aleatórias de cada fonte de incerteza. Por razões didáticas, neste capítulo serão abordados aspectos referentes à estimativa das incertezas em medições diretas. O capítulo 8 tratará da incerteza nas medições indiretas.

Uma *medição direta* é aquela cuja indicação resulta naturalmente da aplicação do sistema de medição sobre o mensurando. Há apenas uma grandeza de entrada envolvida. A medição de um diâmetro com um paquímetro, e a temperatura de uma sala por um termômetro, são exemplos de medição direta. A *medição indireta* envolve a combinação de duas ou mais grandezas de entrada por meio de expressões matemáticas que viabilizam a determinação do valor associado ao mensurando. São exemplos de medição indireta: (a) a determinação da área de uma parede a partir da multiplicação dos valores medidos para sua largura e altura e (b) a determinação da massa específica de um material calculada a partir da razão entre sua massa e seu volume já previamente medidos.

Diferentemente do “guia”, os conceitos envolvidos serão aqui introduzidos gradativamente, com nível de complexidade crescente.

### *5.1. Correção e incerteza expandida*

Fundamentalmente, dois parâmetros numéricos devem ser estimados em qualquer operação de medição: a *correção* (C) e a *incerteza expandida* (U). A correção é o parâmetro que deve ser adicionado à indicação para corrigir os efeitos sistemáticos, dando origem ao resultado corrigido ou resultado base.

A incerteza expandida (U) está associada com a dúvida ainda presente no resultado da medição. É quantificada como a faixa de valores, simétrica em torno do resultado base, que delimita a faixa de dúvidas com nível de confiança estabelecido, normalmente de 95%. É composta da combinação dos efeitos aleatórios conhecidos de cada fonte de incerteza que afeta o processo de medição e contém ainda componentes relacionados com a desinformação existente sobre algumas das fontes de incerteza.

Para estimar adequadamente a correção e a incerteza expandida envolvidas num processo de medição é necessário considerar, de forma ampla, todas as possíveis fontes de incertezas que possam trazer efeitos aleatórios e sistemáticos ao resultado da medição, mesmo aquelas que aparentam ser pouco significativas. Recomenda-se que a decisão da relevância de cada fonte de incerteza considerada não seja tomada *a priori*. No momento em que, no conjunto, as várias contribuições forem combinadas, ficará claro quais fontes de incertezas são dominantes e quais podem ser desprezadas.

É necessário identificar e estimar para cada fonte de incerteza tanto os efeitos aleatórios quanto os sistemáticos. Se fossem perfeitamente determinadas, as influências dos efeitos sistemáticos poderiam ser exatamente compensadas. Entretanto, como o valor da correção nunca pode ser perfeitamente conhecido, a correção dos efeitos sistemáticos não pode ser perfeita, o que dá origem a uma incerteza residual. No conjunto, as diversas componentes de incerteza, residuais ou não, deve ser levadas em conta e combinadas para que a incerteza expandida seja corretamente estimada.

Deve ser enfatizado que os modelos e procedimentos adotados neste capítulo são válidos apenas para o caso em que o mensurando seja invariável, isto é, tenha um valor único, bem definido e permaneça estável no período em que a medição está sendo realizada. Os casos em que o mensurando é variável será abordado no capítulo 7.

### *5.2. Estimativa da correção e incerteza expandida quando há apenas uma fonte de incerteza*

Seja inicialmente considerado o caso ideal em que apenas uma fonte de incerteza influencia o processo de medição. Trata-se de uma situação aparentemente idealizada mas que acontece na prática quando os efeitos de uma determinada fonte de incerteza em particular são muito superiores a todas as demais.
São aqui considerados dois níveis de informações acerca das fontes de incertezas:

#### 5.2.1. Correção e repetitividade conhecidas

Neste caso, a correção associada à fonte de incerteza considerada coincide com a correção do próprio processo de medição. A incerteza expandida está diretamente relacionada com a repetitividade mas depende do número de medições efetuadas:

##### 5.2.1.1 Apenas uma medição efetuada

A incerteza expandida coincide com a repetitividade quando ambas são estimadas para o nível de confiança de 95%. Assim:

$$\begin{aligned} C &= C_{FI} \\ U_{95\%} &= Re_{FI} \end{aligned} \qquad (5.1)$$

onde:
$C_{FI}$ e $Re_{FI}$ representam respectivamente a correção e a repetitividade da fonte de incerteza
C e $U_{95\%}$ representam respectivamente a correção e a incerteza expandida do processo de medição

##### 5.2.1.2 A média de "n" medições é considerada

A influência dos erros aleatórios sobre a média de "n" medições repetitivas, efetuadas nas mesmas condições, tende a diminuir à medida que "n" aumenta. É possível demonstrar que a incerteza expandida da média de "n" medições pode ser estimada por:

$$\begin{aligned} C &= C_{FI} \\ U_{95\%} &= \frac{Re_{FI}}{\sqrt{n}} \end{aligned} \qquad (5.2)$$

onde:
$C_{FI}$ e $Re_{FI}$ representam respectivamente a correção e a repetitividade da fonte de incerteza
n é o número de medições efetuadas a partir das quais a média foi calculada
C e $U_{95\%}$ representam respectivamente a correção e a incerteza expandida do processo de medição

#### 5.2.2. Erro máximo conhecido

Neste caso não são conhecidos separadamente estimativas para as parcelas sistemáticas e aleatórias da fonte de incerteza. O erro máximo representa os limites de uma faixa simétrica em torno do zero que, em nenhum ponto da faixa de medição, é ultrapassado quando os efeitos sistemáticos e aleatórios são simultaneamente considerados.

Como não se sabe *a priori* se os efeitos sistemáticos são ou não dominantes em relação aos aleatórios, por segurança, assume-se duas hipóteses:

(a) o erro de medição distribui-se com a mesma probabilidade dentro dos limites dados por – $E_{máx}$ e + $E_{máx}$, isto é, associa-se uma distribuição de probabilidade retangular (ou uniforme) ao erro de medição;
(b) a faixa dentro da qual o erro de medição se encontra não é reduzida quando se considera a média de “n” medições repetitivas. Embora seja natural esperar que com a média os efeitos dos erros aleatórios sejam reduzidos, isto não ocorre para a parcela sistemática. Como não se sabe que parcela do erro máximo é devida ao erro aleatório, não é possível aplicar de forma segura um redutor.

Através de propriedades das distribuições estatísticas é possível calcular o desvio padrão associado à uma distribuição retangular. Neste caso particular, o desvio padrão é dado por:

$$s = \frac{E_{máx}}{\sqrt{3}}$$

Como procura-se uma faixa com nível de confiança 95%, a incerteza expandida pode ser estimada multiplicando-se por 2 o desvio padrão dado pela equação (5.2). Assim, para este caso em particular onde não são compensados os efeitos sistemáticos, a correção e a incerteza expandida são dados por:

$$C = 0$$
$$U_{95\%} = \frac{2E_{máx}}{\sqrt{3}} \qquad (5.3)$$

onde:
C e $U_{95\%}$ representam respectivamente a correção e a incerteza expandida do processo de medição
$E_{máx}$ representa o erro máximo do processo de medição.

Problema resolvido: Estime a incerteza expandida da medição do comprimento de uma peça de precisão efetuada uma única vez por um micrômetro com erro máximo ($E_{máx}$) de 4 μm sabendo que nas condições de medição o $E_{máx}$ é a única fonte de incerteza relevante.
Solução: A situação descrita no problema reflete a situação descrita acima, no item 5.2.1.2. Assim, a incerteza expandida pode ser diretamente estimada por uma das equações (5.3):

$U_{95\%} = 2\ E_{máx} / \sqrt{3}$
$U_{95\%} = 2 * 4 / \sqrt{3} = 4{,}6$ μm

## *5.3. Incerteza padrão*

Nos casos mais complexos, onde as características de mais de uma fonte de incerteza devem ser combinadas para estimar a incerteza expandida do processo de medição, é conveniente definir a denominada *incerteza padrão:*
A incerteza padrão (u) de uma fonte de incerteza é definida como a faixa de dispersão em torno do valor central equivalente a um desvio padrão.
A estimativa da incerteza padrão associada a uma fonte de incerteza pode ser efetuada através de procedimentos estatísticos ou por outros meios:

### 5.3.1. Estimativa da incerteza padrão por meios estatísticos (avaliação “tipo A”)

Há várias situações onde o desvio padrão experimental associado a uma fonte de incerteza pode ser estimado a partir de valores de observações repetitivas do mensurando. A incerteza padrão coincide então com o valor estimado do desvio padrão.
A nomenclatura adotada no “guia” denomina os procedimentos estatísticos como “tipo A”.
Para estimar o desvio padrão experimental seja **q** uma variável aleatória. Sejam $\mathbf{q_k}$ (para k = 1, 2, … , n) n valores independentemente obtidos para a variável **q**. Sua média pode ser estimada por:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \qquad (5.4)$$

O desvio padrão experimental da variável **q**, representado por “s”, é estimado por:

$$s(q) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2}{n-1}} \qquad (5.5)$$

Deve ser lembrado que, para que a estimativa de s(q) pela equação (5.5) seja confiável, é necessário envolver um número suficientemente grande de observações independente (é recomendável pelo menos n > 10).
Quando é utilizado o valor médio das indicações, obtido a partir da média de um conjunto de “m” indicações de **q**, o desvio padrão experimental da média de **q** é estimado por:

$$s(\overline{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{m}} \qquad (5.6)$$

A incerteza padrão a ser associada a esta variável aleatória depende do procedimento de cálculo utilizado. Se apenas um valor de **q** é considerado, a incerteza padrão é dada por:

$$u(q) = s(q) \qquad (5.7)$$

Se a média de “m” valores de **q** é considerada, a incerteza padrão deve ser estimada por:

$$u(\overline{q}) = s(\overline{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{m}} \qquad (5.8)$$

O “guia” denota por ν o número de graus de liberdade associado à determinação da incerteza padrão. Em ambos os casos, o número de graus de liberdade é contado como o número de dados usados para estimar o desvio padrão experimental menos um, isto é:

$$\mathrm{u} = n - 1 \qquad (5.9)$$

### 5.3.2. Estimativa da incerteza padrão por meios não estatísticos (avaliação “tipo B”)

Há um grande número de situações onde não é prático, ou mesmo possível, usar procedimentos estatísticos para estimar o desvio padrão experimental associado a uma fonte de incerteza. Outras informações devem ser usadas para estimar o desvio padrão associado aos efeitos da fonte de incerteza sobre o processo de medição.
A nomenclatura adotada no “guia” denomina os procedimentos não estatísticos como procedimentos “tipo B”.
Informações conhecidas *a priori* sobre o comportamento da fonte de incerteza ou deduzidas por observação das suas características devem ser consideradas. Informações obtidas de medições anteriores, certificados de calibração, especificações do instrumento, de manuais técnicos e mesmo estimativas baseadas em conhecimentos e experiências anteriores do experimentalista são exemplos do conhecimento *a priori* que devem ser levados em conta. Os limites dentro dos quais uma fonte de incerteza naturalmente se encontra, e o tipo de distribuição tipicamente atribuída a esta podem ser deduzidos em alguns casos.

#### **5.3.2.1** Estimativas baseadas em levantamentos estatísticos conhecidos *a priori*

É o caso em que existem levantamentos estatísticos anteriores que fornecem dados quantitativos confiáveis sobre a influência da fonte de erro considerada. Certificados ou relatórios de calibração de padrões ou módulos do sistema de medição normalmente trazem este tipo de informação. Registros históricos das características metrológicas ou operacionais de elementos utilizados na medição ou das próprias grandezas de influência, devem também ser utilizados.
Se nada for dito em contrário, e se o levantamento de informações envolver um volume expressivo de dados, com base no teorema do limite central, é comum supor que o comportamento da fonte de incerteza referenciada pode ser razoavelmente bem modelado por uma distribuição normal (ou gaussiana).
Deve-se procurar extrair da documentação disponível estimativas da influência das parcelas sistemática e da incerteza padrão associadas à fonte de incerteza, e seus efeitos sobre o valor indicado pelo sistema de medição. Por exemplo, suponha que um sistema elétrico de medição de pressão sofra influência indesejável da tensão da rede de alimentação elétrica. Suponha também a existência de dados estatísticos prévios que caracterizem o nível médio da tensão da rede e seu desvio padrão. Para avaliar a contribuição desta fonte de incerteza na incerteza global do sistema de medição de pressão é necessário exprimir os efeitos do valor médio da tensão da rede, e de seu desvio padrão, respectivamente, em termos de componentes sistemática e aleatória sobre o valor de pressão indicado pelo sistema de medição.

> Em alguns casos, a documentação disponível já apresenta a incerteza expandida, geralmente calculada a partir da multiplicação da incerteza padrão combinada por um fator numérico denominado fator de abrangência. Para calcular a incerteza padrão é necessário dividir a incerteza expandida por este fator. É prática comum indicar no relatório, ou certificado de calibração, o valor do fator de abrangência adotado. Normalmente seu valor é 2, para aproximadamente 95% de nível de confiança, mas outros valores podem ser assumidos (vide Anexo III).
> Geralmente há informações na documentação existente que permite a determinação do número de graus de liberdade com que a incerteza padrão é conhecida.

#### 5.3.2.2 Estimativas baseadas em limites máximos

Não é rara a situação onde o conjunto de informações disponíveis sobre a fonte de incerteza considerada é muito limitado. Na ausência de levantamentos estatísticos anteriores é ainda possível buscar outros elementos que levem a uma estimativa segura para os limites de influências desta fonte de incerteza.
Em algumas situações dispõe-se de estimativas de limites máximos dentro dos quais espera-se que os efeitos das fontes de incertezas estejam contidos. São exemplos:

a) registros históricos de valores típicos de grandezas de influência;
b) informações extraídas de folhas de especificações técnicas de sistemas ou padrões;
c) normas que regulamentam limites máximos admissíveis para a grandeza de influência ou classe de padrões ou instrumentos de referência utilizados;
d) informações extraídas de curvas de calibração na forma de limites máximos de erros;
e) deduções ou análises acerca dos efeitos da fonte de incerteza baseados em suas propriedades e características naturais.

Nestes casos, caracterizam-se os limites superior (LS) e inferior (LI) dentro do qual se situam os efeitos da fonte de erro sobre a indicação do sistema de medição em análise.
Do ponto de vista estatístico não há informações suficientes para supor a forma da distribuição de probabilidades associada aos efeitos desta fonte de incerteza. Geralmente assume-se, por segurança, a existência de uma distribuição de probabilidades uniforme (ou retangular), isto é, há a mesma probabilidade do efeito se situar em qualquer ponto dentro dos limites estabelecidos.
Seja **q** uma variável aleatória com distribuição retangular contida entre os limites LI e LS. Seu valor médio e incerteza padrão podem ser estimados respectivamente por:

$$\overline{q} = \frac{LI + LS}{2} \qquad (5.10)$$

e

$$u(q) = \frac{LS - LI}{2\sqrt{3}} \tag{5.11}$$

Onde:
LI e LS são, respectivamente, os limites inferior e superior da faixa que delimita os efeitos da fonte de incerteza sobre a indicação do sistema de medição
A correção deve ser estimada a partir dos efeitos que o valor médio da grandeza de influência exerce sobre a indicação.
O "guia" recomenda que, nos casos em que distribuições uniformes (ou retangulares) são assumidas, o número de graus de liberdade adotado seja infinito.
Há outras distribuições de probabilidade que podem melhor se adequar a situações particulares. Estes casos não serão tratados neste texto. Recomenda-se consultar o "guia".

## *5.4. Combinação de efeitos*

Uma vez estimadas a correção e a incerteza padrão para cada fonte de incerteza, estas devem ser consideradas em conjunto para que tanto a correção combinada quanto a incerteza padrão combinada possam ser determinadas para o processo de medição.

### 5.4.1. Correção combinada

As componentes sistemáticas de cada fonte de incerteza devem ser combinadas por soma algébrica simples. Os valores das correções associadas a cada fonte de incerteza devem estar expressos em unidades do mensurando. Por exemplo, se a temperatura afeta o valor medido de um comprimento, o efeito da temperatura média sobre a medição do comprimento deve ser expresso em unidades de comprimento e não em unidades de temperatura.
Assim, a *correção combinada* para "p" fontes de incertezas deve ser estimado por:

$$C_C = \sum_{k=1}^{p} C_k \tag{5.12}$$

onde:
$C_k$ representa a correção associada à k-ésima fonte de incerteza
p é o número de fontes de incertezas considerado
$C_C$ representa a correção combinada das "p" fontes de incertezas

### 5.4.2. Incerteza padrão combinada

Para que a estimativa da incerteza padrão combinada seja efetuada convenientemente, algumas propriedades das variáveis aleatórias devem ser  deve ser consideradas. Se as várias fontes de incerteza agem como variáveis aleatórias independentes, a incerteza combinada não pode ser obtida pela simples soma algébrica de cada  incerteza padrão.
Duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente independentes se suas variações se comportam de forma totalmente desvinculadas, isto é, não há nenhuma relação entre o crescimento de uma e o crescimento (ou decrescimento) da outra. Do ponto de vista estatístico estas variáveis são ditas não correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é zero. É a situação mais comumente presente entre as fontes de erro em medições diretas.
Duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente dependentes se suas variações se dão de forma vinculadas, isto é, há uma relação nitidamente definida entre o crescimento de uma e o crescimento da outra de forma propocional à primeira. Do ponto de vista estatístico estas variáveis são ditas correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é unitário e positivo (+1). Há ainda o caso em que o crescimento da primeira está nitidamente atrelado ao decrescimento proporcional da segunda. Neste caso estas variáveis são ainda ditas correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é também unitário porém negativo (-1). Dificilmente fontes de erros estatisticamente dependentes estão presentes em medições diretas.

Sejam “X1” e “X2” duas variáveis aleatórias estatisticamente independentes. Seja “Y” calculado pela soma: Y = X1 + X2 e “Z” pela diferença: Z = X1 - X2. “Y” e “Z” também serão variáveis aleatórias. É possível demonstrar que as médias de “Y” e “Z” podem ser estimadas por:

$$\begin{aligned} m_Y &= m_{X1} + m_{X2} \\ m_Z &= m_{X1} - m_{X2} \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Sendo “X1” e “X2” estatisticamente independentes, é possível demonstrar que os desvios padrões de “Y” e “Z” podem ser calculados a partir dos desvios padrões de “X1” e “X2” por:

$$\begin{aligned} s_Y &= \sqrt{s_{X1}^2 + s_{X2}^2} \\ s_Z &= \sqrt{s_{X1}^2 + s_{X2}^2} \end{aligned}$$

As equações (5.14) mostram que, se X1 e X2 são variáveis estatisticamente independentes, o desvio padrão da sua soma e da sua diferença coincidem, e são indistintamente obtidos pela raiz quadrada da soma dos quadrados de ambos. A expressão (5.14) pode ser generalizada para estimar a soma (ou subtração ou combinações de somas e subtrações) de um número ilimitado de termos:

$$s_{(X1 \pm X2 \pm \ldots \pm Xp)} = \sqrt{s_{X1}^2 + s_{X2}^2 + \ldots + s_{Xp}^2} \qquad (5.14)$$

Freqüentemente na medição direta os efeitos associados às várias fontes de incerteza se refletem sobre a indicação do sistema de medição como parcelas aditivas, isto é, cada fonte de incerteza soma (ou subtrai) sua contribuição sobre a indicação. É como se houvesse uma soma dos efeitos de várias variáveis aleatórias. Assim, neste caso, a incerteza combinada ($u_c$) da influência das várias fontes de incerteza pode ser estimada a partir das incertezas padrão de cada fonte de incerteza por:

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_p^2} \qquad (5.15)$$

onde
$u_1$, $u_2$, ... ,$u_p$ representam as incertezas padrão de cada uma das “p” fontes de incertezas
$u_c$ representa a incerteza padrão combinada

Também aqui é necessário que as incertezas padrão de cada fonte de incertezas sejam expressas na mesma unidade do mensurando.
A expressão (5.15) só é válida para estimar a incerteza combinada se os efeitos de cada fonte de incerteza manifesta-se de forma aditiva sobre a indicação e no caso que estas sejam mutuamente estatisticamente independentes. Caso ao menos uma destas condições não seja obedecida, as expressões desenvolvidas no capítulo 8 devem ser consideradas em lugar da (5.15).

### 5.4.3. Número de graus de liberdade efetivo

Quando as incertezas padrão de várias fontes de incertezas são consideradas para estimar a incerteza padrão combinada, o número de graus de liberdade resultante da incerteza combinada deve ser estimado a partir de informações de cada fonte de incerteza.
O “guia” denomina por *número de graus de liberdade efetivos* ($\nu_{ef}$) o número de graus de liberdade associado à incerteza padrão combinada. Recomenda a utilização da equação de Welch-Satterthwaite para estimar o número de graus de liberdade efetivos:

$$\frac{u_c^4}{\mathrm{u}_{ef}} = \frac{u_1^4}{\mathrm{u}_1} + \frac{u_2^4}{\mathrm{u}_2} + \ldots + \frac{u_p^4}{\mathrm{u}_p} \qquad (5.16)$$

onde:

**$u_c$ é a incerteza padrão combinada;**
**$u_1$, $u_2$, ... ,$u_p$ são as incertezas padrão de cada uma das "p" fontes de incerteza;**
**$\nu_1$, $\nu_2$, ... , $\nu_p$ são os números de graus de liberdade de cada uma das "p" fontes de incerteza;**
**$\nu_{ef}$ é o número de graus de liberdade efetivo associado à incerteza padrão combinada.**

### 5.4.4. Incerteza expandida

A incerteza padrão combinada, estimada através da equação (5.15), corresponde ao desvio padrão resultante da ação combinada das várias fontes de incertezas consideradas.
Em aplicações nas áreas da engenharia é comum trabalhar com níveis de confiança de 95%. Para atingir este nível de confiança, a incerteza padrão combinada ($u_c$), que corresponde a um desvio padrão, deve ser multiplicada por um coeficiente numérico, o coeficiente de Student. No "guia", este coeficiente é denominado de *fator de abrangência*, comumente representado pelo símbolo "$k_{95}$" quando o nível de confiança 95% é usado.
A denominada *incerteza expandida* ($U_{95\%}$) corresponde à faixa de valores que enquadra a incerteza com nível de confiança de aproximadamente 95%. É estimada por:

$$U_{95\%} = k_{95\%} \, . \, u_c \tag{5.17}$$

onde

**$u_c$** é a incerteza padrão combinada;
**$k_{95\%}$** é o fator de abrangência para o nível de confiança de 95%
**$U_{95\%}$** representa a incerteza expandida para o nível de confiança 95%

Nota: Na prática é comum representar a incerteza expandida pelo símbolo U e subentendendo-se que o nível de confiança é sempre 95%.

O fator de abrangência $k_{95\%}$ equivale ao coeficiente de Student para dois desvios padrões (o que corresponde ao nível de confiança de 95,45%). O "guia" recomenda que a tabela reproduzida abaixo seja usada:

Tabela 5.1 – Valores para o fator de abrangência ($k_{95\%}$) para nível de confiança 95% em função do número de graus de liberdade efetivo ($\nu_{ef}$):

| $\upsilon_{ef}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{95}$ | 13,97 | 4,53 | 3,31 | 2,87 | 2,65 | 2,52 | 2,43 | 2,37 | 2,28 | 2,23 | 2,20 | 2,17 |

| $\upsilon_{ef}$ | 18 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 60 | 80 | 100 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{95}$ | 2,15 | 2,13 | 2,11 | 2,09 | 2,07 | 2,06 | 2,06 | 2,05 | 2,04 | 2,03 | 2,02 | 2,00 |

Para valores fracionários de $\nu_{ef}$, interpolação linear pode ser usada se $\nu_{ef} > 3$. Alternativamente, o valor de $k_{95}$ correspondente ao valor de $\nu_{ef}$ imediatamente inferior na tabela pode ser adotado.

A estimativa da incerteza expandida deve ser obtida através dos seguintes passos:

1. Estime as incertezas padrão e o número de graus de liberdade de cada fonte de incerteza considerada no processo de medição;
2. Estime a incerteza padrão combinada usando a equação (5.15);
3. Estime o número de graus de liberdade efetivos através da equação (5.16);
4. Entre na tabela 5.1 com o número de graus de liberdade efetivo e obtenha o fator de abrangência correspondente;
5. Estime a incerteza expandida multiplicando o fator de abrangência pela incerteza padrão combinada.

*Problema resolvido: Estime a incerteza expandida de um processo de medição onde foram consideradas três fontes de incertezas cujas respectivas incertezas padrão e número de graus de liberdade estão especificados abaixo:*

*Fonte de incertezas I:* $u_I = 0,012$ *mm,* $n_I = 12$

*Fonte de incertezas II:* $u_{II} = 0,006$ *mm,* $n_{II}$ = ¥

*Fonte de incertezas III:* $u_{III} = 0,008$ *mm,* $n_{III}$ = ¥

*Solução: Uma vez que as informações resultantes do passo 1 acima já estão disponíveis, prossegue-se do passo 2:*

*Passo 2: Estimando* $u_c$ = Ö$(0,012^2 + 0,006^2 + 0,008^2) = 0,0156$

*Passo 3: Estimando* $\nu_{ef}$ pela equação (5.16):

$$\frac{0,0156^4}{u_{ef}} = \frac{0,012^4}{12} + \frac{0,006^4}{\infty} + \frac{0,008^4}{\infty}$$

$\nu_{ef} = 34,3$

Passo 4: $k_{95\%} = 2,09$

Passo 5: $U_{95\%} = 2,09 * 0,0156 = 0,033$ mm

### *5.5. Balanço de incertezas*

É possível sistematizar o procedimento para estimar a correção combinada e a incerteza expandida associadas a um processo de medição onde mais de uma fonte de incerteza esteja envolvida. Recomenda-se que estas informações sejam organizadas na forma de uma planilha de avaliação, como a apresentada na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Planilha sugerida para realizar o balanço de incertezas

| Fontes de incertezas | | Efeitos sistemáticos | Efeitos aleatórios | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sím-bolo | Descrição | Correção [ ] | valor bruto [ ] | tipo de distribuição | divisor | u [ ] | $\nu$ |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| $C_c$ | Correção combinada | (5.12) | | | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_c$ | Incerteza padrão combinada | | | normal | | (5.15) | (5.16) |
| U | Incerteza expandida (95%) | | | normal | | (5.17) | |

A tabela 5.2 possui três campos. No primeiro campo, formado pelas duas primeiras colunas, onde deve ser descrita cada fonte de incerteza considerada, uma por linha. A primeira coluna é reservada para, se desejado, atribuir um símbolo para a fonte de incerteza.

O segundo campo, formado pela terceira coluna, conterá informações sobre os efeitos sistemáticos. Na terceira coluna deverá ser atribuída a estimativa da correção associada à respectiva fonte de incerteza, na mesma unidade do mensurando.

O terceiro campo, formado pelas demais colunas, contém informações acerca dos efeitos aleatórios associados a cada fonte de incerteza. A quarta coluna contém o valor bruto associado à fonte de incerteza, por exemplo, os limites de uma distribuição uniforme. Na quinta coluna deve ser identificado o tipo de distribuição (uniforme, triangular, normal, etc). Na sexta coluna deve ser explicitado o divisor que transforma o valor bruto na incerteza padrão, assumindo normalmente $\sqrt{3}$ para distribuição uniforme (ou retangular), 2 quando o valor bruto é a incerteza expandida e 1 quando é o próprio desvio padrão experimental. Finalmente, a última coluna deverá conter o número de graus de liberdade associado a cada fonte de incerteza.

As três últimas linhas são usadas para exprimir os resultados combinados da análise de incertezas: a correção combinada, a incerteza padrão combinada, o número de graus de liberdade efetivos e, finalmente, a incerteza expandida. Em cada campo da tabela estão representados os números das equações usadas para estimar cada um destes parâmetros a partir dos demais dados da tabela.

Em linhas gerais, o procedimento de avaliação da incerteza expandida e correção combinada de um processo de medição pode ser organizado nos seguintes passos:

Analise o processo de medição. Procure entender claramente os princípios envolvidos e os procedimentos adotados para chegar ao resultado da medição.

Faça um levantamento de todas as fontes de incerteza que possuem influência sobre o processo de medição. Não descarte *a priori* fontes de incerteza que aparentemente não tenham influência significativa sobre o processo. Disponha cada fonte de incerteza em uma linha diferente da tabela.

Procure, para cada fonte de incerteza, estimar os efeitos sistemáticos e aleatórios. Lembre-se que efeitos sistemáticos não conhecidos ou não compensados devem ser considerados como efeitos aleatórios. Estime e transponha para cada linha correspondente da tabela os valores estimados para a correção e os dados que permitam a estimativa da respectiva incerteza padrão, como o tipo de distribuição. Informe também o respectivo número de graus de liberdade. Mantenha uma memória de cálculo com as informações e considerações que levaram àquelas estimativas.

Calcule a correção combinada através da equação (5.12) somando algebricamente os valores da terceira coluna.

Calcule os valores das incertezas padrão de cada fonte de incerteza. Calcule a incerteza padrão combinada usando a equação (5.15) e transponha o resultado na sétima coluna da linha correspondente.

Calcule o número de graus de liberdade efetivos através da equação (5.16) e transponha o resultado para a última coluna da linha correspondente.

Estime a incerteza padrão através da equação (5.17).

### *5.6. Exemplo resolvido*

A seguir é apresentado um exemplo completo resolvido onde um balanço de incerteza é realizado para a medição de uma massa com uma balança.

*Formulação:*

Determinar a incerteza da medição da massa de um anel de ouro realizada nas seguintes condições:

a) *Foi usada uma balança eletrônica com certificado de calibração. Os valores da correção e da respectiva incerteza (para k = 2) estão disponíveis para vários pontos da faixa de medição e são apresentados na figura 5.1;*
b) *esta balança apresenta um indicador digital com resolução de 0,05 g;*
c) *a temperatura no local onde a medição foi efetuada oscila tipicamente entre 24,0 e 26,0°C. Sabe-se que, em relação aos dados da calibração, esta balança apresenta estabilidade com temperatura de +0,025 g para cada +1°C de variação da temperatura ambiente acima da de calibração (20,0°C);*
d) *a calibração da balança foi realizada há 5 meses. Sabe-se que sua estabilidade em função do tempo permanece dentro dos limites de – 0,02 g/mês;*
e) *foram efetuadas as 12 medições independentes listadas na figura.*

Deve ser ainda acrescentado que deseja-se compensar todos os efeitos sistemáticos possíveis, reduzindo ao máximo as incertezas.
Este problema está esquematicamente ilustrado na figura 5.1.

Solução:
A solução do problema segue o roteiro apresentado no item 5.5
Passo 1: Análise do processo de medição.

Trata-se de um mensurando invariável, medido repetidamente por 12 vezes. O certificado de calibração está disponível, onde constam estimativas para a correção e sua respectiva incerteza, sendo viável a correção dos respectivos efeitos sistemáticos. Devem ser considerados os efeitos da temperatura do ambiente sobre o comportamento da balança e que suas características se degradam com o tempo.

Passo 2: Identificação das fontes de incerteza.

a) repetitividade da indicação (o fato de medições repetitivas não mostrarem sempre a mesma indicação) – símbolo adotado: Re
b) erros detectados na calibração (a correção para cada ponto e sua respectiva incerteza) – símbolo adotado: Cal
c) resolução limitada do dispositivo mostrador digital – símbolo adotado: R
d) deriva temporal (degradação das características da balança com o tempo) – símbolo adotado: DTmp
e) deriva térmica (influência da temperatura ambiente sobre o comportamento da balança) – símbolo adotado: DTer

Estas informações foram transpostas para as duas primeiras colunas da tabela 5.3.

Passo 3: estimativa dos efeitos sistemáticos e aleatórios

a) Repetitividade da indicação: avaliação por métodos estatísticos (tipo A)

Sua influência é tipicamente aleatória, não há componente sistemática associada. Aplicando a equação (5.5) nas doze medidas efetuadas estima-se o desvio padrão experimental: s = 0,080 g. A equação (5.6) é usada para estimar o desvio padrão experimental da média das doze medidas: $s/\sqrt{12} =$ 0,0183 g. Esta já é uma estimativa da incerteza padrão associada. O número de graus de liberdade envolvido é $\upsilon = 12 - 1 = 11$.

b) Erros detectados na calibração: avaliação com base em informações existentes *a priori* (tipo B)

Os efeitos destas fontes de incertezas são estimados tendo por base dados já existentes decorrentes de uma calibração previamente realizada e apresentados no respectivo certificado.

Este certificado apresenta a respectiva correção para vários pontos da sua faixa de medição. O valor médio das indicações é 19,950 g. Como este valor está muito próximo de 20,00 g, o valor estimado para da correção -0,15 g é adotado. A respectiva incerteza expandida associada (k = 2) é de ± 0,08 g, o que leva à incerteza padrão de ± 0,04 g.

*Observação: Nos casos em que a média das indicações não seja um valor muito próximo de um ponto onde uma estimativa para a correção é apresentada no certificado de calibração, embora seja comum estimar os valores da correção e incerteza através de interpolação linear, tendo por base os respectivos valores dos pontos mais próximos, isto deve ser feito com muito cuidado, uma vez que não há garantias de que entre estes pontos o comportamento seja linear. Nestes casos, é prudente elevar o nível da incerteza obtida.*

c) Resolução: avaliação com base em características naturais (tipo B)

A resolução do dispositivo mostrador digital da balança introduz uma componente adicional de erro devido ao truncamento numérico. Seu efeito é apenas de natureza aleatória e pode ser quantificado através dos limites máximos possíveis. O máximo erro de truncamento corresponde a metade do valor da resolução. Este erro poderia então ser modelado por meio de uma distribuição uniforme (retangular), centrada no zero, e limites extremos dados por metade do valor da resolução (-0,025 g a + 0,025 g).

Porém, esta fonte de incerteza é normalmente considerada na calibração e já está embutida na incerteza associada à correção, não devendo ser novamente considerada.

d) Deriva temporal: avaliação com base em informações do certificado de calibração (tipo B)

Em função do tempo transcorrido após a calibração é possível que as características da balança tenham se degradado. Sua extensão pode ser estimada a partir dos limites máximos esperados para a balança, calculados a partir de dados da sua estabilidade ao longo do tempo (fig. 5.1). Para um período de 5 meses, espera-se que os erros estejam dentro do limite dado por $\pm$ 5 * 0,02 = $\pm$ 0,10 g. Na falta de outras informações, assume-se uma distribuição retangular, centrada no zero, e com limites em $\pm$ 0,10 g. Não há como estimar os efeitos sistemáticos.

e) Deriva térmica: avaliação com base em informações do certificado de calibração (tipo B)

Em função da temperatura no local da medição ser diferente da temperatura na qual a calibração foi realizada, uma componente de incerteza adicional é introduzida, Uma vez conhecidas as características de estabilidade da balança em função da temperatura e os limites dentro dos quais a temperatura no local da medição se manteve, é possível estimar sua influência através dos limites máximos estimados para esta grandeza.

Para o limite superior da temperatura (26°C) a balança indica em torno de 0,15 g a mais. Para 24°C, indica 0,10 g a mais. Este efeito dá origem a uma parcela sistemática e outra aleatória. O valor médio de 0,125 g corresponde à melhor estimativa da parcela sistemática, levando ao valor da correção de -0,125 g. A parcela aleatória pode ser modelada através de uma distribuição uniforme (retangular), centrada no zero, com limites dados por $\pm$ 0,025g.

Passo 4: Cálculo da correção combinada

Aplicando a equação (5.12) chega-se à correção combinada de –0,275 g.

Passo 5: incertezas padrão de cada fonte e incerteza combinada

As respectivas incertezas padrão de cada fonte de incerteza, calculadas a partir dos valores brutos, aplicado-se o devido divisor, estão apresentadas na tabela 5.3. A incerteza padrão combinada, calculada pela equação (5.15), é de 0,079 g.

Passo 6: número de graus de liberdade efetivos

Aplicando a equação (5.16) chega-se a:

$$u_{ef} = \frac{(0.0740)^4}{\frac{(0,0183)^4}{11} + 0 + 0 + 0 + 0} = 2941$$

Passo 7: incerteza expandida

O fator de abrangência para 2941 graus de liberdade é 2,00. A incerteza expandida pode ser calculada multiplicando-se a incerteza padrão combinada por 2,00. Assim, tem-se:

$U_{95\%}$ = 0,148 g.

Tabela 5.3 – Balanço de incertezas do problema resolvido

| Fontes de incertezas | | Efeitos sistemáticos | Efeitos aleatórios | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sím-bolo | Descrição | correção [ g ] | valor bruto [ g ] | tipo de distribuição | divisor | U [ g ] | ν |
| Re | Repetitividade | 0,000 | 0,0183 | normal | 1 | 0,0183 | 11 |
| Cal | Erros detectados na calibração | -0,150 | 0,0800 | normal | 2 | 0,0400 | ∞ |
| DTmp | Deriva temporal | 0,000 | 0,1000 | uniforme | √3 | 0,0577 | ∞ |
| Dter | Deriva térmica | -0,125 | 0,0250 | uniforme | √3 | 0,0144 | ∞ |
| | | | | | | | |
| $C_c$ | Correção combinada | -0,275 | | | | | |
| $u_c$ | Incerteza padrão combinada | | | normal | | 0,074 | 2941 |
| U | Incerteza expandida (95%) | | | normal | | 0,148 | |

Assim, o processo de medição apresenta correção combinada –0,275 g e incerteza expandida 0,148 g.

Considere como um segundo exemplo a mesma situação do problema anterior com a única diferença que não se deseja compensar os efeitos sistemáticos. Obviamente que a parcela sistemática não compensada elevará a incerteza global da medição.

Para estimar a incerteza resultante neste caso, considere a soma dos valores absolutos das parcelas sistemáticas não compensadas (soma dos módulos das correções). Esta soma deve ser adiciona algebricamente à incerteza expandida já calculada para o caso em que os efeitos sistemáticos são compensados levando à nova incerteza expandida.

A soma dos valores absolutos das correções não compensadas leva a:

$$SC = |-0,150| + |-0,125| = 0,275$$

A nova incerteza expandida será então:

$$U_{95\%} = 0,275 + 0,148 = 0,423 \text{ g}$$

Neste caso, há sensível piora na incerteza do processo de medição que passa a apresentar correção combinada zero e incerteza expandida 0,423 g.

# Capítulo 6

# CALIBRAÇÃO DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO

Um sistema de medição (SM) de boa qualidade deve ser capaz de operar com pequenos erros. Seus princípios construtivos e operacionais devem ser projetados para minimizar erros sistemáticos e aleatórios ao longo da sua faixa de medição, nas sua condições de operação nominais.

Entretanto, por melhores que sejam as características de um SM, este sempre apresentará erros, seja por fatores internos, seja por ação das grandezas de influência externas. A perfeita caracterização das incertezas associadas a estes erros é de grande importância para que o resultado da medição possa ser estimado de maneira segura. Embora, em alguns casos, os erros de um sistema de medição possam ser analítica ou numericamente estimados, na prática são utilizados procedimentos experimentais quase que exclusivamente.

Através do procedimento experimental denominado *calibração* é possível correlacionar os valores indicados pelo sistema de medição e sua correspondência com a grandeza sendo medida. Esta operação é extremamente importante e é realizada por um grande número de entidades credenciadas espalhadas pelo país.

Este capítulo apresenta, em linhas gerais, aspectos característicos da calibração e de operações a esta relacionadas.

## *6.1. Operações Básicas para Qualificação de Sistemas de Medição*

### 6.1.1. Calibração

*Calibração* é um procedimento experimental através do qual são *estabelecidas, sob condições específicas, as relações entre os valores indicados por um instrumento de medição ou sistema de medição ou valores representados por uma medida materializada ou um material de referência, e os valores correspondentes das grandezas estabelecidos por padrões*.

Como exemplos, através de uma calibração é possível estabelecer:

- a relação entre temperatura e tensão termoelétrica de um termopar;
- uma estimativa dos erros sistemáticos de um manômetro;
- o valor efetivo de uma massa padrão;
- a dureza efetiva de uma placa "padrão de dureza";
- o valor efetivo de um "resistor padrão".

O resultado de uma calibração permite tanto o estabelecimento dos valores do mensurando para as indicações, como a determinação das correções a serem aplicadas. Uma calibração também pode determinar outras propriedades metrológicas como, por exemplo, os efeitos das grandezas de influência sobre a indicação, ou o comportamento metrológico de sistemas de medição em condições adversas de utilização (em temperaturas elevadas ou muito baixas, na ausência de gravidade, sob radiação nuclear, etc).

O resultado da calibração geralmente é registrado em um documento específico denominado *certificado de calibração* ou, algumas vezes, referido como *relatório de calibração*. O certificado de calibração apresenta várias informações acerca do desempenho metrológico do sistema de medição analisado e descreve claramente os procedimentos realizados. Frequentemente, como seu principal resultado, apresenta uma tabela, ou gráfico, contendo, para cada ponto medido ao longo da faixa de medição: a) estimativas da correção a ser aplicada e b) estimativa da incerteza associada à correção. Em função dos resultados obtidos, o desempenho do SM pode ser comparado com aquele constante nas especificações de uma norma técnica, ou outras determinações legais, e um parecer de conformidade pode ser emitido.

A calibração pode ser efetuada por qualquer entidade, desde que esta disponha dos padrões rastreados e pessoal competente para realizar o trabalho. Para que uma calibração tenha validade oficial, é necessário que seja executada por entidade legalmente credenciada. No Brasil, existe a Rede Brasileira de Calibração (RBC), coordenada pelo INMETRO - Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial. Esta rede é composta por uma série de laboratórios secundários, espalhados pelo país, ligados a Universidades, Empresas, Fundações e outras entidades, que recebem o credenciamento do INMETRO e estão aptos a expedir certificados de calibração oficiais.

Hoje, com as tendências da globalização da economia, a competitividade internacional das empresas é uma questão crucial. A qualidade dos serviços e dos produtos da empresa têm que ser assegurada a qualquer custo. As normas da série ISO 9000 aparecem para disciplinar a gestão das empresas para melhorar e manter a qualidade de uma organização. A calibração tem o seu papel de grande importância neste processo, uma vez que um dos requisitos necessários para uma empresa que se candidate à certificação pelas normas ISO 9000, é que os sistemas de medição e padrões de referência utilizados nos processo produtivo, tenham certificados de calibração oficiais.

Embora a calibração seja a operação de qualificação de instrumentos e sistemas de medição mais importante, existem outras operações comumente utilizadas:

### 6.1.2. Ajuste

Operação complementar, normalmente efetuada após uma calibração, quando o desempenho metrológico de um sistema de medição não está em conformidade com os padrões de comportamento esperados. Trata-se de uma "<u>regulagem interna</u>" do SM, executada por técnico especializado. Visa fazer coincidir, da melhor forma possível, o valor indicado no SM, com o valor correspondente do mensurado submetido. São exemplos:

- alteração do fator de amplificação (sensibilidade) de um SM por meio de um potenciômetro interno;
- regulagem do "zero" de um SM por meio de parafuso interno.

No caso de medidas materializadas, o ajuste normalmente envolve uma alteração das suas características físicas ou geométricas. Por exemplo:

- colocação de uma "tara" em uma massa padrão;

Após o término da operação de ajuste, é necessário efetuar uma recalibração, visando conhecer o novo comportamento do sistema de medição, após os ajustes terem sidos efetuados.

### 6.1.3. Regulagem

É também uma operação complementar, normalmente efetuada após uma calibração, quando o desempenho metrológico de um sistema de medição não está em conformidade com os padrões de comportamento esperados. Envolve apenas ajustes efetuados em <u>controles externos</u>, normalmente colocados à disposição do usuário comum. É necessária para fazer o SM funcionar adequadamente, fazendo coincidir, da melhor forma possível, o valor indicado com o valor correspondente do mensurado submetido. São exemplos:

- alteração do fator de amplificação (sensibilidade) de um SM por meio de um botão externo;
- regulagem do "zero" de um SM por meio de um controle externo indicado para tal.

### 6.1.4. Verificação

A operação de *verificação* é utilizada no âmbito da metrologia legal, devendo esta ser efetuada por entidades oficiais denominados de Institutos de Pesos e Medidas Estaduais (IPEM), existentes nos diversos estados da Federação.

Trata-se de uma operação mais simples, que tem por finalidade comprovar que:

- um sistema de medição está operando corretamente dentro das características metrológicas estabelecidas por lei;
- uma medida materializada apresenta características segundo especificações estabelecidas por normas ou outras determinações legais.

São verificados instrumentos como balanças, bombas de gasolina, taxímetros, termômetros clínicos e outros instrumentos, bem como medidas materializadas do tipo massa padrão usados no comércio e área da saúde, com o objetivo de proteger a população em geral.

A verificação é uma operação de cunho legal, da qual resulta a emissão de selo ou plaqueta com a inscrição "VERIFICADO", quando o elemento testado satisfaz às exigências legais. É efetuada pelos órgãos estaduais denominados de Institutos de Pesos e Medidas (IPEM) ou diretamente pelo INMETRO, quando trata-se de âmbito federal.

## *6.2. Destino dos Resultados de uma Calibração:*

Os resultados de uma calibração são geralmente destinados a uma das seguintes aplicações:

a) Levantamento da curva de erros visando determinar se, nas condições em que foi calibrado, o sistema de medição está em conformidade com uma norma, especificação legal ou tolerância definida para o produto a ser medido, e conseqüente emissão de certificado. Efetuado periodicamente, garantirá a confiabilidade dos resultados da medição e assegurará correlação (rastreabilidade) aos padrões nacionais e internacionais;
b) Levantamento da curva de erros visando determinar dados e parâmetros para a operação de ajuste do sistema de medição;
c) Levantamento detalhado da curva de erros e tabelas com valores da correção e sua incerteza, com o objetivo de corrigir os efeitos sistemáticos, visando reduzir a incerteza do resultado da medição (capítulo 7). A aplicação da correção poderá ser efetuada manual ou automaticamente;
d) Análise do comportamento metrológico e operacional dos sistemas de medição nas fases de desenvolvimento e aperfeiçoamento, incluindo a análise das grandezas externas que influem no seu comportamento;
e) Análise do comportamento metrológico e operacional dos sistemas de medição em condições especiais de operação (por exemplo: elevadas temperaturas, na ausência de gravidade, em elevadas pressões, etc);

Adicionalmente, a calibração deve ser efetuada quando, por alguma razão, se deseja o levantamento mais detalhado sobre o comportamento metrológico de um sistema de medição, sobre o qual existe dúvida ou suspeita de funcionamento irregular.

## *6.3. Métodos de Calibração*

### 6.3.1. Calibração Direta

A parte superior da figura 6.1 ilustra o método de calibração direta. O mensurado é aplicado sobre o sistema de medição por meio de medidas materializadas, cada qual com seu valor verdadeiro convencional suficientemente conhecido. São exemplos de medidas materializadas: blocos padrão (comprimento), massas padrão, pontos de fusão de substâncias puras, entre outras.

É necessário dispor de uma coleção de medidas materializadas suficientemente completa para cobrir toda a faixa de medição do instrumento. As indicações dos sistemas de medição são confrontadas com cada valor verdadeiro convencional e a correção e sua incerteza são estimadas por meio de medições repetitivas.

### 6.3.2. Calibração Indireta

Não seria fácil calibrar o velocímetro de um automóvel utilizando a calibração direta. O conceito de medida materializada não se aplica à velocidade. As constantes físicas naturais, como a velocidade de propagação do som no ar ou nos líquidos, ou mesmo a velocidade da luz, são inapropriadas para este fim. A solução para este problema passa pela calibração indireta.

Este método é ilustrado na parte inferior da figura 6.1. O mensurado é gerado por meio de um dispositivo auxiliar, que atua simultaneamente no sistema de medição a calibrar (SMC) e também no sistema de medição padrão (SMP), isto é, um segundo sistema de medição que não apresente erros superiores a 1/10 dos erros do SMC. As indicações do SMC são comparadas com as do SMP, sendo estas adotadas como VVC, e os erros são determinados.

Para calibrar o velocímetro de um automóvel pela calibração indireta, o automóvel é posto em movimento. Sua velocidade em relação ao solo, além de indicada pelo velocímetro, é também medida por meio de um sistema de medição padrão, cujos erros sejam 10 vezes menores que os erros do velocímetro a calibrar. Este SMP pode ser, por exemplo, constituído por uma quinta roda, afixada na parte traseira do automóvel, ou, hoje é comum a utilização de sensores que usam um raio laser dirigido ao solo e, pela análise do tipo de sinal que retorna, determinar a velocidade real do automóvel com baixas incertezas. Neste exemplo o próprio automóvel é o gerador da grandeza padrão, isto é, da velocidade, que é simultaneamente submetida a ambos os sistemas de calibração. Para levantar a curva de erros, o automóvel deve trafegar em diferentes patamares de velocidade repetidas vezes.

Algumas vezes não se dispõe de um único sistema de medição padrão que englobe toda a faixa de medição do SMC. Neste caso, é possível utilizar diversos SMPs de forma complementar. Por exemplo:

- deseja-se calibrar um termômetro entre 20 e 35 °C;
- não se dispõe de um padrão que, individualmente, cubra esta faixa completamente;
- dispõe-se de um termômetro padrão para a faixa 20 a 30 °C e outro para 30 a 40 °C;
- o termômetro a calibrar é parcialmente calibrado para a faixa de 20 a 30 °C contra o primeiro padrão;
- o restante da calibração, entre 30 e 35 °C, é completado contra o segundo padrão.

### 6.3.3 Padrões para Calibração

Para que o valor da medida materializada, ou o indicado pelo SMP, possa ser adotado como valor verdadeiro convencional (VVC), é necessário que seus erros sejam sensivelmente menores que os erros esperados no SMC. Tecnologicamente, quanto menores os erros do padrão melhor. Economicamente, quanto menores os erros do padrão, mais caro este é. Procurando buscar o equilíbrio técnico-econômico, adota-se como padrão um elemento que, nas condições de calibração e para cada ponto de calibração, apresente incerteza não superior a um décimo da incerteza esperada para o sistema de medição a calibrar. Assim:

$$U_{SMP} \leq \frac{1}{10} U_{SMC}$$

Desta forma, o SMP apresentará ao menos um dígito confiável a mais que o SMC, o que é suficiente para a determinação dos erros deste último. Excepcionalmente, em casos onde é muito difícil ou caro de se obter um padrão 10 vezes superior ao SMC, usa-se o limite de 1/5 ou até mesmo 1/3 para a razão entre as incertezas do SMP e o SMC. Este últimos devem ser analisados com cuidado para que a incerteza da calibração não venha a ser muito elevada.

Em função da mudança do comportamento do instrumento com a velocidade de variação do mensurado, distinguem-se a calibração estática e a dinâmica. Apenas nos instrumentos de ordem zero a calibração estática coincide com a dinâmica. Nos demais casos, é necessário determinar a resposta do SM para diversas freqüências de variação do mensurado.

Qualquer sistema de medição deve ser calibrado periodicamente. Este período é, algumas vezes, especificado por normas, ou fabricantes de instrumentos, ou outras fontes como laboratórios de calibração, porém são influenciados pelas condições e/ou freqüência de uso. Para a calibração de um SM em uso na indústria, são geralmente usados padrões dos laboratórios da própria indústria. Entretanto, estes padrões precisam ser calibrados periodicamente, o que é executado por laboratórios secundários da RBC. Mas também estes padrões precisam ser calibrados por outros que, por sua vez, também necessitam de calibração e assim por diante... Estabelece-se assim uma hierarquia que irá terminar nos padrões primários internacionais, ou mesmo, na própria definição da grandeza. A calibração periódica dos padrões garante a rastreabilidade internacional, o que elimina o risco do "metro francês" ser diferente do "metro australiano". Como exemplo, cita-se a figura 6.2, onde se exemplifica a correlação entre os padrões. Isto garante a coerência das medições no âmbito mundial.

## *6.4. Calibração Parcial*

Normalmente objetiva-se determinar o comportamento operacional e metrológico do sistema de medição na sua integralidade, isto é, do conjunto formado pelos módulos sensor/transdutor, transmissão ou tratamento de sinal, dispositivo mostrador e demais, que compõem a cadeia de medição. Este sistema de medição pode apresentar-se de forma independente (ex: manômetro, máquina de medir por coordenadas) ou pode estar integrado a um sistema composto de vários elementos interligáveis fisicamente (ex: célula de carga + amplificador da máquina de ensaio de materiais, termômetro de um reator nuclear, formado por termopar + cabo de compensação + voltímetro).
Não é raro, especialmente nas fases de desenvolvimento e fabricação de módulos, ser inviável a calibração do sistema de medição como um todo. Esta dificuldade pode surgir em função do porte e complexidade do sistema ou da dificuldade tecnológica de se obter uma grandeza padrão com a qualidade necessária ou de se manter todas as variáveis influentes sob controle. Nestes casos, é comum efetuar calibrações separadamente em alguns módulos do sistema, tendo sempre em vista que estes devem apresentar um sinal de saída definido (resposta) para um sinal de entrada conhecido (estímulo). A análise do desempenho individual de cada módulo possibilita a determinação das características de desempenho do conjunto.

Freqüentemente um módulo isolado não tem condições de operar plenamente. É necessário acrescentar elementos complementares para formar um SM que tenha condições de operar. Para que estes elementos complementares não influam de forma desconhecida sobre o módulo a calibrar, é necessário que o erro máximo introduzido por cada elemento não seja superior a um décimo do erro admissível ou esperado para o módulo a calibrar.

Esta situação é ilustrada na figura 6.3. Supondo que o sistema de medição normal (0) tenha módulos com incertezas relativas da ordem de 1% e desejando-se efetuar a calibração do sensor transdutor isoladamente, é necessário compor um outro sistema de medição, o SM1. Neste sistema, são empregados uma unidade de tratamento de sinais e um dispositivo mostrador (1), com incerteza relativa máxima de 0,1%. Garantido estes limites, pode-se afirmar que os erros do SM1 são gerados exclusivamente no transdutor (0), visto que os demais módulos contribuem com parcelas de incerteza significativamente menores.

Ainda na figura 6.3, no caso em que se deseje calibrar isoladamente a unidade de tratamento de sinais (0), deverá ser composto o SM2, formado por um sensor/transdutor e um dispositivo mostrador que apresentem incertezas insignificantes. Neste caso, em geral, o sensor transdutor é substituído por um gerador de sinais equivalente. Este sinal, no entanto, não deve estar afetado de um erro superior a um décimo do admitido na operação da unidade de tratamento de sinais.

Na prática, existem alguns sistemas de medição que fornecem, para grandezas vetoriais, diversas indicações (ex: as três componentes cartesianas de uma força, as três coordenadas da posição de um ponto apalpado). A calibração deste sistema é normalmente efetuada para cada uma destas componentes do vetor isoladamente, da forma usual. Deve-se adicionalmente verificar se há influência da variação de uma das componentes sobre as demais, ou seja, os coeficientes de influência.

### 6.5. *Procedimento Geral de Calibração*

A calibração de sistemas de medição é um trabalho especializado e exige amplos conhecimentos de metrologia, total domínio sobre os princípios e o funcionamento do sistema de medição a calibrar (SMC), muita atenção e cuidados na sua execução e uma elevada dose de bom senso. Envolve o uso de equipamento sofisticado e de alto custo.

Recomenda-se sempre usar um procedimento de calibração documentado, segundo exigências de normas NBR/ISO. Quando tais procedimentos de calibração não existirem, devem ser elaborados com base em informações obtidas de normas técnicas, recomendações de fabricantes e informações do usuário do SM em questão, complementados com a observância das regras básicas da metrologia e no bom senso.

A seguir, apresenta-se uma proposta de roteiro geral a ser seguido para a calibração de um SM qualquer. Esta proposta deve ser entendida como orientativa apenas, devendo ser analisado caso a caso a conveniência de adotar, modificar ou acrescentar as recomendações sugeridas.

Quando trata-se de um trabalho não rotineiro, de cunho técnico-científico, e muitas vezes de alta responsabilidade, é fundamental que sejam registrados todos os eventos associados com o desenrolar da atividade, na forma de um *memorial de calibração*.

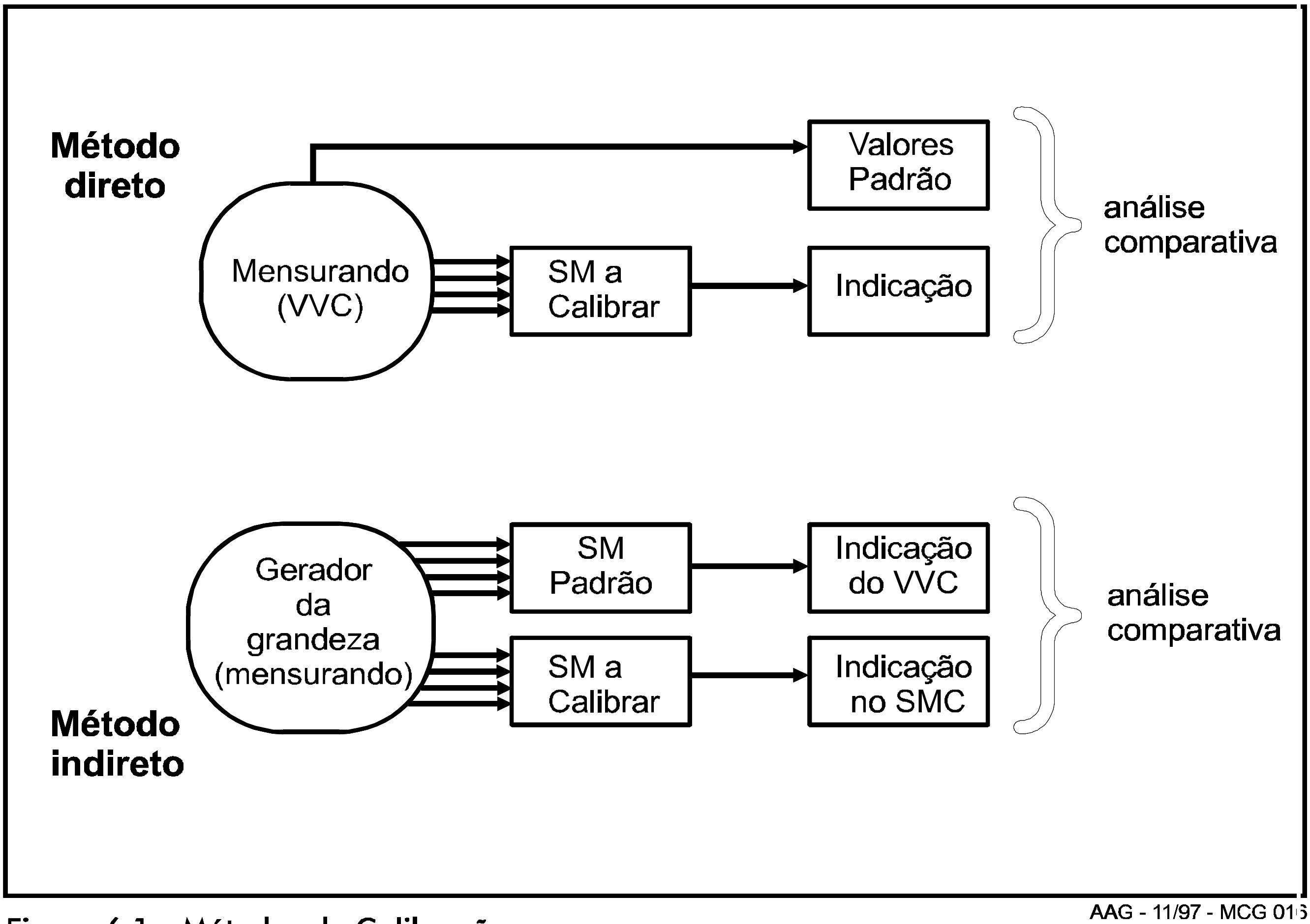



Figura 6.1 - Métodos de Calibração

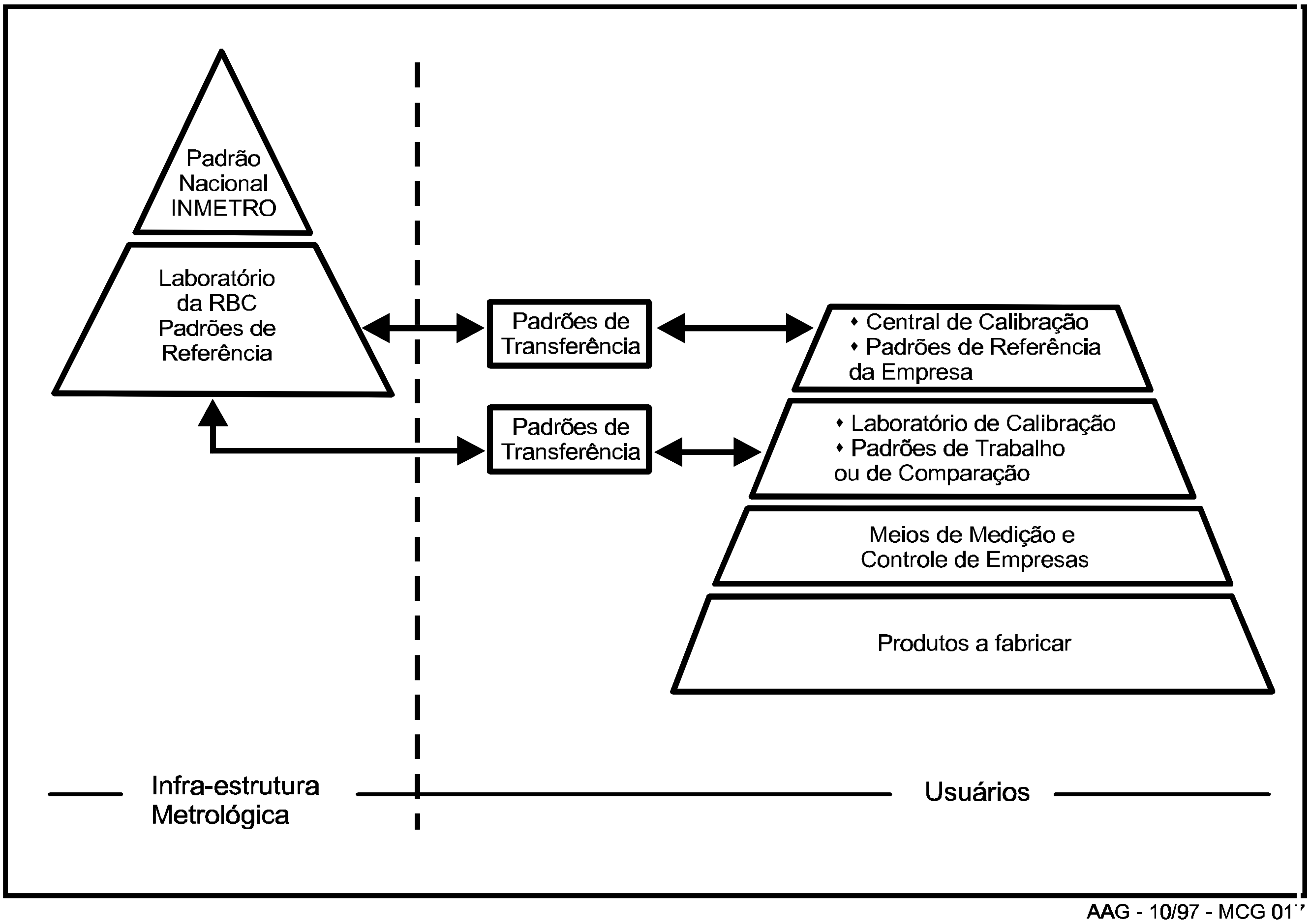
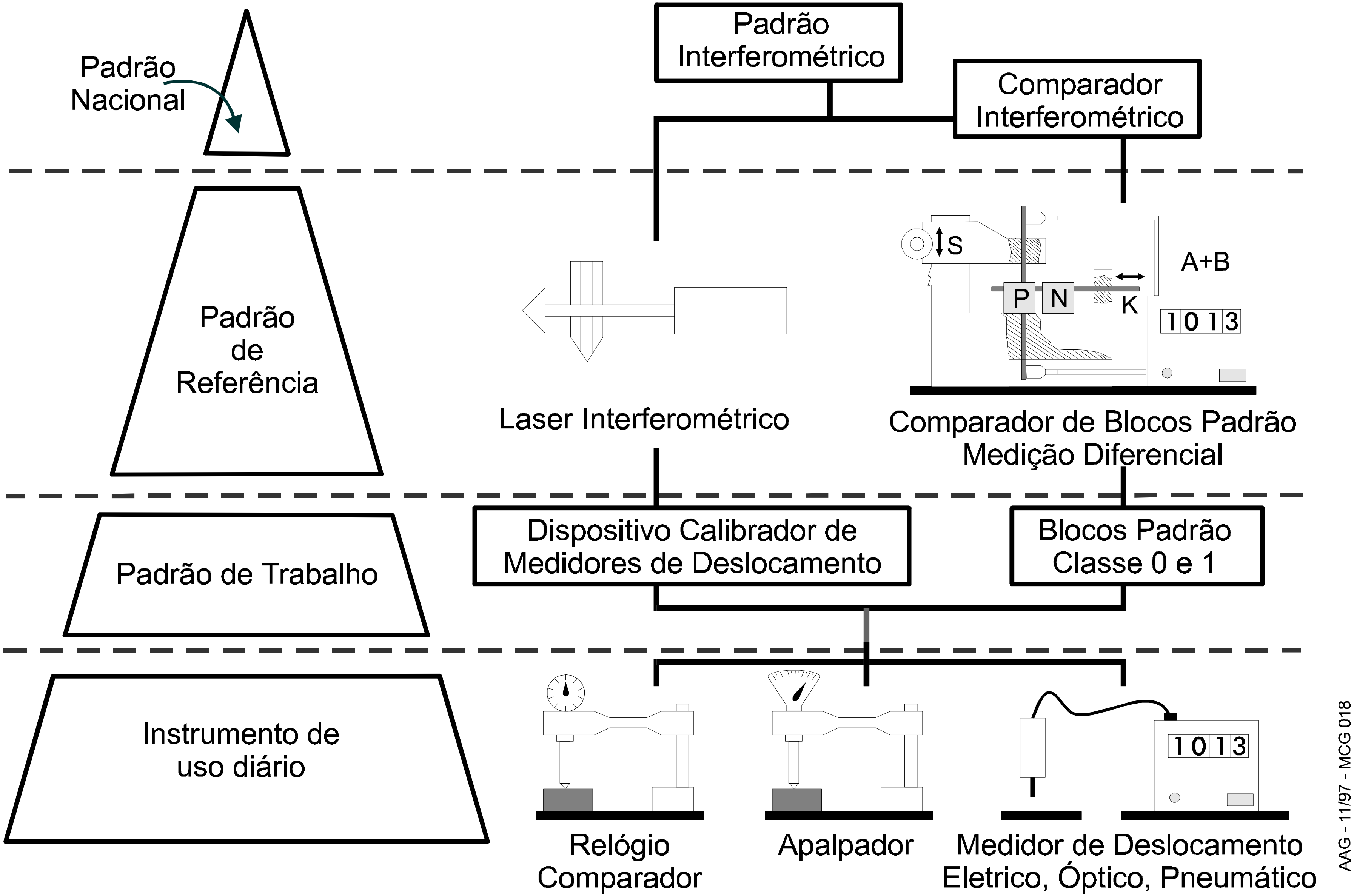



Figura 6.2 - Hierarquia de Calibração do Padrão Nacional até o Produto Acabado

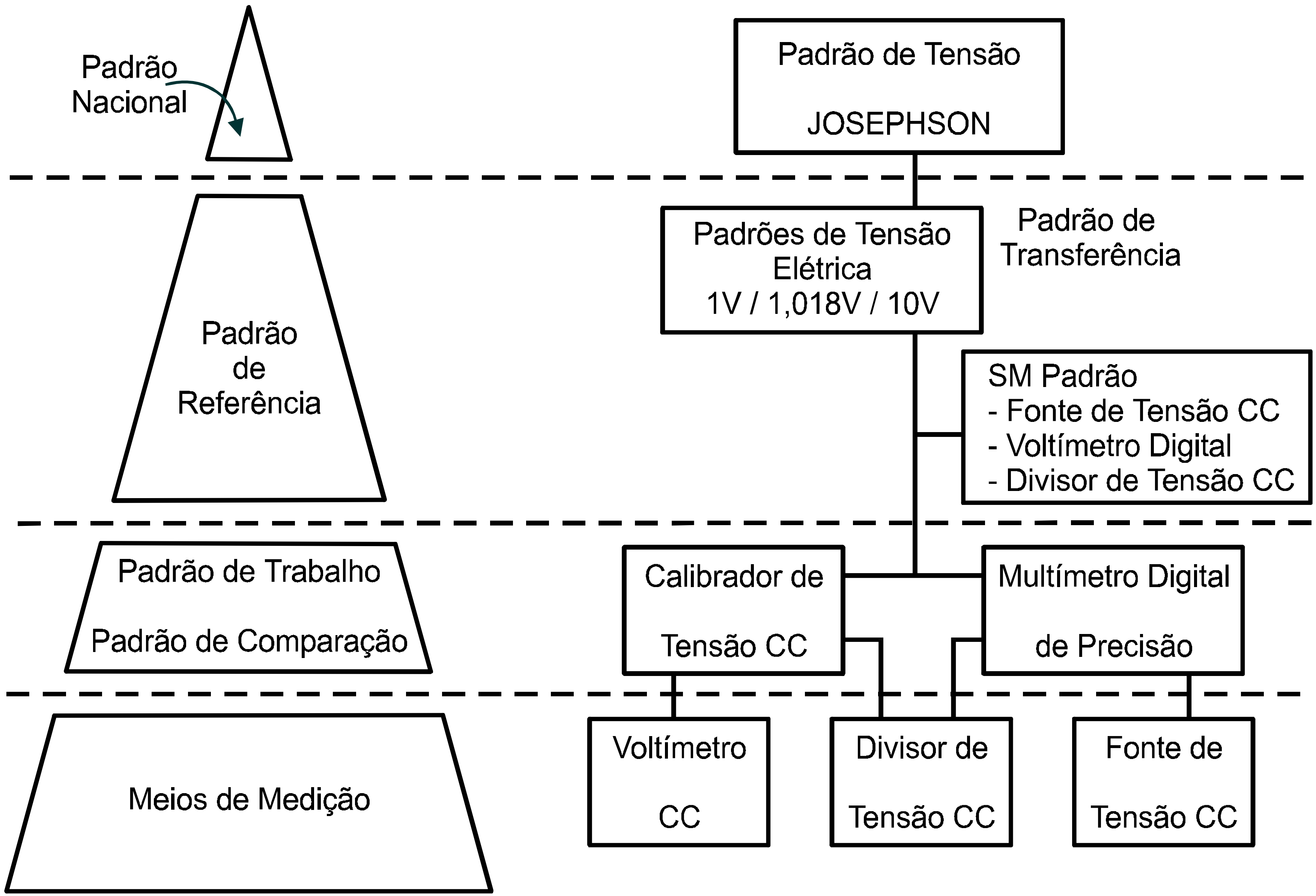



Exemplo de Níveis de Hierarquia de Calibração para Medidores de Deslocamento

| PADRÃO (meios de medição) | USUÁRIO | ATIVIDADES | CONDIÇÕES PRELIMINARES DA CALIBRAÇÃO/ MEDIÇÃO | DOCUMENTAÇÃO DA CALIBRAÇÃO/ MEDIÇÃO |
|---|---|---|---|---|
| Padrão Nacional | Laboratório do INMETRO | Desenvolvimento, manutenção e transferência dos padrões nacionais | Garantia da rastreabilidade da unidade até os padrões primários através de intercomparações internacionais | Certificado de calibração INMETRO para padrões de referência |
| Padrão de Referência | Laboratórios da RBC | Garantia da infra-estrutura metrológica industrial | Certificado de calibração INMETRO | Certificado de calibração RBC para padrões de trabalho |
| Padrão de Trabalho | Laboratórios de calibração das empresas | Calibração dos meios de medição para atender a demanda interna | Certificado de calibração RBC | Certificado de calibração da empresa ou outro que comprove a qualificação |
| Padrões / Instrumentos de uso geral | Todas as áreas de atuação da empresa | Medições e calibrações no âmbito do sistema da qualidade | Certificados de calibração da empresa ou outros que comprovem a qualificação | Marca, selo ou plaqueta de verificação |

AAG - 11/97 - MCG 019

Estrutura Organizacional para rastrear resultados de medição de empresas a Padrões Nacionais




AAG - 11/97 - MCG 020

Exemplo dos níveis de hierarquia de rastreabilidade para instrumentos de medição de CC - Grandezas Elétricas

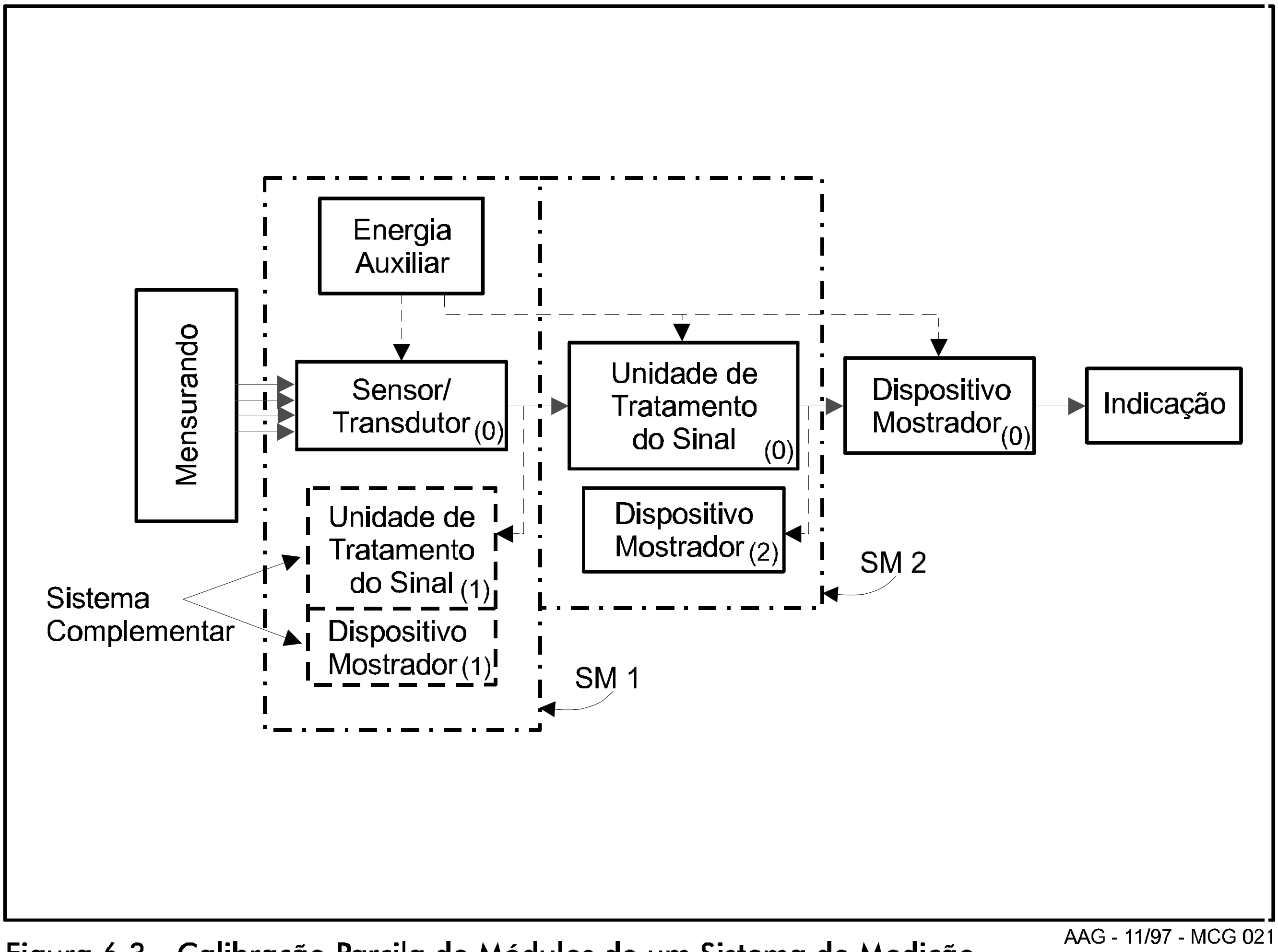



Figura 6.3 - Calibração Parcila de Módulos de um Sistema de Medição

Esta proposta de roteiro genérico de uma calibração está estruturada em oito etapas:

*Etapa 1- Definição dos objetivos:*

Deve-se definir claramente o destino das informações geradas. A calibração poderá ser realizada com diferentes níveis de abrangência dependendo do destino dos resultados. Por exemplo:

- dados para ajustes e regulagens: o estudo se restringirá a apenas alguns poucos pontos da faixa de medição do SMC;

- levantamento da curva de erros para futura correção: definidas as condições de operação, deve-se programar uma calibração com grande número de pontos de medição dentro da faixa de medição do SMC, bem como, realizar grande número de ciclos para reduzir a incerteza nos valores da tendência ou da correção ;

- dados para verificação: o volume de dados a levantar tem uma intensidade intermediária, orientada por normas e recomendações específicas da metrologia legal;

- avaliação completa do SMC: compreende, na verdade, diversas operações de calibração em diferentes condições operacionais (ex: influência da temperatura, tensão da rede, campos eletromagnéticos, vibrações, etc);

*Etapa 2 - Identificação do Sistema de Medição a Calibrar (SMC)*

É fundamental um estudo aprofundado do SMC: manuais, catálogos, normas e literatura complementar, visando:

- identificar as características metrológicas e operacionais esperadas. Deve-se procurar identificar todas as características possíveis, seja do sistema como um todo ou seja dos módulos independentes;

- conhecer o modo de operação do SMC: na calibração é necessário que se utilize o sistema corretamente e para isso é necessário conhecer todas as recomendações dadas pelo fabricante. Operar o sistema apenas com base na tentativa pode levar a resultados desastrosos;

- documentar o SMC: a calibração será válida exclusivamente para o instrumento analisado, sendo portanto necessário caracteriza-lo perfeitamente (número de fabricação, série, modelo, etc);

*Etapa 3 - Seleção do Sistema de Medição Padrão (SMP)*

Com base nos dados levantados na etapa anterior, selecionar, dentre os disponíveis, o SMP apropriado, considerando:

- a incerteza do SMP nas condições de calibração idealmente não deve ser superior a um décimo da incerteza esperada para o SMC. É importante observar que se estas estão expressas em termos percentuais, é necessário que ambas tenham o mesmo valor de referência, ou que seja efetuada as devidas compensações;

- faixa de medição: o SMP deve cobrir a faixa de medição do SMC. Vários SMP's podem ser empregados se necessário;

*Etapa 4* - *Preparação do Experimento*

Recomenda-se efetuar o planejamento minucioso do experimento de calibração e das operações complementares, com a finalidade de reduzir os tempos e custos envolvidos e de se evitar que medições tenham que ser repetidas porque se "esqueceu" um aspecto importante do ensaio. O planejamento e a preparação do ensaio envolvem:

- executar a calibração adotando procedimento de calibração segundo documentado em normas específicas;

- quando o procedimento documentado não existir, realizar estudo de normas e manuais operativos, recomendações técnicas, de fabricantes e ou laboratórios de calibração;

- estudo do SMP: para o correto uso e a garantia da confiabilidade dos resultados, é necessário que o executor conheça perfeitamente o modo de operação e funcionamento do SMP;

- esquematização do ensaio: especificação da montagem a ser realizada, dos instrumentos auxiliares a serem envolvidos (medidores de temperatura, tensão da rede, umidade relativa, etc) e da seqüência de operações a serem seguidas;

- preparação das planilhas de coleta de dados: destinadas a facilitar a tomada dos dados, reduzindo a probabilidade de erros e esquecimentos na busca de informações;

- montagem do experimento, que deve ser efetuada com conhecimento técnico e máximo cuidado;

*Etapa 5* - *Execução do Ensaio*

Deve seguir o roteiro fixado no procedimento de calibração. É importante não esquecer de verificar e registrar as condições de ensaio (ambientais, operacionais, etc). Qualquer anomalia constatada na execução dos trabalhos deve ser anotada no memorial de calibração, com identificação cronológica associada com o desenrolar do experimento. Estas informações podem ser úteis para identificar a provável causa de algum efeito inesperado que possa ocorrer.

*Etapa 6* - *Processamento e Documentação dos Dados:*

Todos os cálculo realizados devem ser explicitados no memorial. A documentação dos dados e resultados de forma clara, seja como tabelas ou gráficos, é fundamental.

*<u>Etapa 7</u> - Análise dos Resultados*

A partir da curva de erros, e dos diversos valores calculados para a faixa de medição, determinam-se, quando for o caso, os parâmetros reduzidos correspondentes às características metrológicas e operacionais. Estes valores são comparados às especificações do fabricante, usuário, normas, e dão lugar a um parecer final. Este parecer pode ou não atestar a conformidade do SMC com uma norma ou recomendação técnica, apresentar instruções de como e restrições das condições em que o SMC pode ser utilizado, etc.

*<u>Etapa 8</u> - Certificado de Calibração*

A partir do memorial, gera-se o *Certificado de Calibração*, que é o documento final que será fornecido ao requisitante, no qual constam as condições e os meios de calibração, bem como os resultados e os pareceres.

A norma NBR ISO 10 012-1 "Requisitos da Garantia da Qualidade para Equipamentos de Medição" prevê que os resultados das calibrações devem ser registrados com detalhes suficientes de modo que a rastreabilidade de todas as medições efetuadas com o SM calibrado possam ser demonstradas, e qualquer medição possa ser reproduzida sob condições semelhantes às condições originais.

As seguintes informações são recomendadas para constar no Certificado de Calibração:

a) descrição e identificação individual do SM a calibrar;
b) data da calibração;
c) os resultados da calibração obtidos após, e quando relevante, os obtidos antes dos ajustes efetuados;
d) identificação do(s) procedimento(s) de calibração utilizado(s);
e) identificação do SM padrão utilizado, com data e entidade executora da sua calibração, bem como sua incerteza
f) as condições ambientais relevantes e orientações expressas sobre quaisquer correções necessárias ao SM a calibrar;
g) uma declaração das incertezas envolvidas na calibração e seus efeitos cumulativos;
h) detalhes sobre quaisquer manutenções, ajustes, regulagens, reparos e modificações realizadas;
i) qualquer limitação de uso (ex: faixa de medição restrita);
j) identificação e assinaturas da(s) pessoa(s) responsável(eis) pela calibração bem como do gerente técnico do laboratório;
k) identificação individual do certificado, com número de série ou equivalente.

Para garantir a rastreabilidade das medições até os padrões primários internacionais, é necessário que o usuário defina, em função das condições de uso específicas do SM, os *intervalos de calibração*. Estes devem ser reajustados com base nos dados históricos das calibrações anteriores realizadas.

Nos casos em que os dados histórios das calibrações anteriores não estiverem disponíveis, e outras informações do usuário do SM não forem suficientes para definir os intervalos de calibração, são recomendados a seguir alguns intervalos iniciais que podem ser usados. Todavia reajustes nestes intervalos deverão ser efetuados, com base nos resultados das calibrações subsequentes.

**RECOMENDAÇÕES PARA INTERVALOS INICIAIS DE CALIBRAÇÃO**

**(ÁREA DIMENSIONAL)**

| INSTRUMENTOS | INTERVALOS DE CALIBRAÇÃO (MESES) |
|---|---|
| Blocos Padrão (Padrão de referência) - angulares/paralelos (Novos) | 12 |
| Calibradores (tampão/anel) lisos, de rosca, cilíndricos e cônicos | 3 a 6 |
| Desempenos | 6 a 12 |
| Escalas Mecânicas | 12 |
| Esquadros | 6 a 9 |
| Instrumentos Ópticos | 6 |
| Máquinas de Medir - (ABBE, Peças Longas, etc.) | 12 |
| Medidores de Deslocamento Eletro/Eletrônico | 6 a 12 |
| Medidores de Deslocamento Mecânicos (relógios comparadores/apalpadores) | 12/3 a 6 |
| Medidores de Deslocamento Pneumáticos | 6 a 12 |
| Medidores de Espessura de Camada | 6 a 12 |
| Micrômetros | 3 / 6 |
| Microscópios | 12 |
| Níveis de Bolha e Eletrônico | 6 |
| Paquímetros | 6 |
| Planos e Paralelos Ópticos | 12 |
| Réguas (Aço ou granito) | 6 a 12 |
| Rugosímetro e Medidor de Forma | 12 |
| Transferidores | 6 |
| Trenas | 6 |

**(OUTRAS GRANDEZAS FÍSICAS)**

| INSTRUMENTO/PADRÃO | INTERVALOS DE CALIBRAÇÃO (MESES) |
|---|---|
| 1. MASSA, VOLUME, DENSIDADE | |
| Massas padrão | 24 |
| Balanças | 12 a 36 |
| Balanças Padrão | 12 |
| Hidrômetros | 36 |
| Densímetros | 12 a 24 |
| 2. PRESSÃO | |
| Manômetros | 6 a 12 |
| Máquinas de Peso Morto | 24 a 36 |
| Barômetros | 6 a 12 |
| Vacuômetros | 6 a 12 |
| Transdutores de Pressão | 12 |
| 3. FORÇA | |
| Transdutores de Força (Células de Carga) | 12 a 24 |
| AnéisDinamométricos | 24 |
| Máquinas de Tração-Compressão (Hidráulicas) | 12 a 24 |
| Máquina de Peso Morto | 24 a 60 |
| 4. TORQUE | |
| Torquímetro | 12 |

**DATA: 02/03/1995**
**VALIDADE DE CALBRAÇÃO: 6 MESES**

**OBJETIVO**

Calibração de um manômetro "WIKA", a fim de conhecer as características metrológicas e compará-las com as especificações do fabricante

**MANÔMETRO A CALIBRAR (SMC)**

Proprietário: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Fabricante: YYYYYYYYYYYYYYYYYYYYYYY

Número de Fabriação: 1174902

Faixa de Indicação: 0 a 40 bar

Valor de uma Divisão: 0,2 bar

Tipo: Bourdon, mecânico

Estado de Conservação: Bom

Índice de Classe (segundo o fabricante): kl. 0,6 (±0,6 % do VFE)

**SISTEMA DE MEDIÇÃO PADRÃO (SMP)**

Máquina de Peso Morto (Manômetro de Êmbolo)
Fabricante: Budenberg Gauge Co. Limited (Inglaterra)
Número de Série (fabricante): 10334/12
Número de Registro (CERTI): RL 0136
Faixas de Medição: 1 a 55 kgf/cm² com resolução de 0,01 kgf/cm²
10 a 550 kgf/cm² com resolução de 0,1 kgf/cm²

Incerteza do SMP: ± 0,04% para a faixa de 0 a 55 kgf/cm²
± 0,1 % para a faixa de 0 a 550 kgf/cm²

Rastreável aos padrões primários conforme Certificado de Calibração Nº 121/92, emitido pelo INMETRO em 07/10/92, com validade at[e 07/10/95.

**PROCEDIMENTO DO ENSAIO**

A calibração foi realizada montando-se o manômetro a calibrar na máquina de peso morto, através da qual foram os valores de pressões previamente estabelecidos, realizando-se as leituras das indicações no manômetro a calibrar.

Foram realizados 3 (três) ciclos de medição, a fim de registrar também a Repetitividade (95%) do manômetro.

Na calibração foi adotado procedimento de calibração CERTI – código PC-SSS, de acordo com especificações da norma DIN 16005.

Condições de ensaio: - Tempratura ambiente: 21,0 ± 0,05 ºC
- Pressão atmosférica: 1022,0 ± 0,5 mbar

**5. CALIBRAÇÃO PRÉVIA E AJUSTAGEM REALIZADA**

Foi realizado a calibração prévia do manômetro e constatou-se que o mesmo apresentava erros sistemáticos (tendência) elevados, conforme pode-se observar a seguir:

| MANÔMETRO (bar) | SMP (bar) | ERRO SISTEMÁTICO (% do Valor Final de Escala) |
|---|---|---|
| 02,00 | 01,75 | 0,6 |
| 06,00 | 05,70 | 0,8 |
| 14,00 | 13,55 | 1,1 |
| 22,00 | 21,40 | 1,5 |
| 30,00 | 29,30 | 1,8 |
| 38,00 | 37,25 | 1,9 |
| 40,00 | 39,25 | 1,9 |

Foi realizado a ajustagem do manômetro, a fim de minimizar os erros sistemáticos apresentados pelo mesmo.

Os resultados obtidos após a ajustagem do manômetro podem ser observados na folha 3.

## 6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Erro sistemático máximo (tendência máxima)

$Td_{max}$=0,10 bar ou 0,25% do VFE

Repetitividade (95%) máxima:

$Re_{max}$=(95%) ±0,14 bar ou ±0,35% do VFE

Erro de Linearidade pelo método dos mínimos quadrados:

Erro máximo = ±0,04 bar ou ±0,10% do VFE

Incerteza do SMC (Td=Re)= ±0,19bar ou 0,48% do VFE

Obs: VFE=Valor Final de Escala=40 bar

## 7. CONCLUSÃO

A incerteza do Manômetro é igual a ± 0,02 bar ou ± 0,5% do VFE

## 8. PARECER

O manômetro satisfaz as tolerâncias estabelecidas pela norma DIN 16005, enquadrando-se como manômetro de classe de erro kl 0,6 (±0,6% do VFE)

## DADOS BRUTOS

| PTOS | SMC | CICLOS SMP | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 2 |
| 01 | 2,00 | 2,05 | 2,00 | 2,06 |
| 02 | 6,00 | 6,03 | 6,05 | 6,08 |
| 03 | 10,00 | 10,02 | 9,99 | 10,01 |
| 04 | 14,00 | 14,03 | 14,00 | 14,02 |
| 05 | 18,00 | 18,00 | 17,98 | 18,02 |
| 06 | 22,00 | 22,04 | 22,03 | 22,00 |
| 07 | 26,00 | 25,98 | 25,95 | 25,97 |
| 08 | 30,00 | 29,95 | 29,93 | 29,95 |
| 09 | 34,00 | 33,92 | 33,96 | 33,93 |
| 10 | 38,00 | 37,90 | 37,88 | 37,92 |
| 11 | 40,00 | 39,92 | 39,94 | 39,95 |

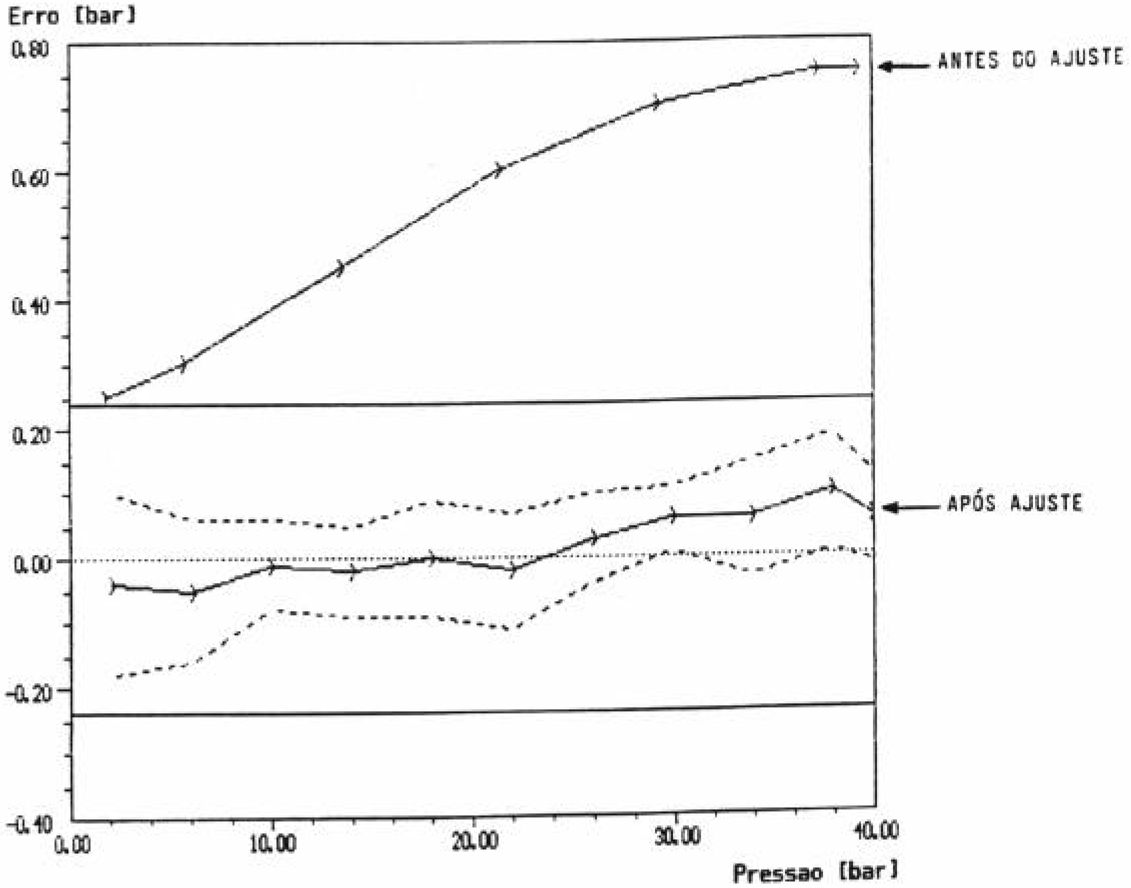
Unidade de Leitura no Sistema de Medição Padrão (SMP): bar
Unidade de Leitura no Sistema de Medição a Calibrar (SMC): bar

## TABELA DADOS PROCESSADOS

| PTOS | MEDIDA MÉDIA SM | VALOR VERDADEIRO CONVENCIONAL | TENDÊNCIA | | REPETITIVIDADE (±) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ABS | %VFE | ABS | % VFE |
| 01 | 2,00 | 2,04 | -0,04 | -0,10 | 0,14 | 0,35 |
| 02 | 6,00 | 6,05 | -0,05 | -0,13 | 0,11 | 0,28 |
| 03 | 10,00 | 10,01 | -0,01 | -,03 | 0,07 | 0,18 |
| 04 | 14,00 | 14,02 | -0,02 | -0,05 | 0,07 | 0,18 |
| 05 | 18,00 | 18,00 | 0,00 | 0,00 | 0,09 | 0,23 |
| 06 | 22,00 | 22,02 | -0,02 | -0,05 | 0,07 | 0,18 |
| 07 | 26,00 | 25,97 | 0,03 | 0,08 | 0,07 | 0,18 |
| 08 | 30,00 | 29,94 | 0,06 | 0,15 | 0,05 | 0,13 |
| 09 | 34,00 | 33,94 | 0,06 | 0,15 | 0,09 | 0,23 |
| 10 | 38,00 | 37,90 | 0,010 | 0,25 | 0,09 | 0,23 |
| 11 | 40,00 | 39,94 | 0,06 | 0,15 | 0,07 | 0,18 |

Convenção:
ABS: Valor Absoluto
VFE: Valor Final de Escala → 40,00
Unidade de Análise: bar

CURVA DE ERROS




Convenção:

——>——>—— Curva de Erro Sistemático

---------------------- Repetitividade (95,00%) relativa a Curva da Tendência

—————— Tolerância segundo norma DIN 16005 para classe de erro kl 0.6 (± 0,6 % do VFE)

# Capítulo 7

## O RESULTADO DA MEDIÇÃO

A escola ensina que a área do Brasil é de 8 511 965 km$^2$. Alguém pode perguntar: "Com a maré alta ou baixa?". De fato, considerando grosseiramente que o litoral brasileiro possui cerca de 8.500 km de praia e que, em média, 20 m de praia são descobertos entre as marés alta e baixa, verifica-se só aí uma variação de 170 km$^2$. Atribuir nota zero a um aluno que errou os dois últimos dígitos em uma prova de geografia parece contrariar o bom senso!

Adicionalmente, sabe-se que não existe forma de medir a área de uma extensão tão grande como a do Brasil com erro relativo tão pequeno quanto ± 0.000012 %, o que seria necessário para garantir o último dígito dos 8 511 965 km$^2$. Nem por terra, nem por satélite, ou outro meio conhecido, é ainda possível obter tal resultado.

Em aplicações técnicas ou científicas, o resultado de uma medição deve apresentar sempre compromisso com a verdade. Deve ser uma informação segura. O *resultado de uma medição* deve espelhar aquilo que a técnica e o bom senso permitem afirmar, nada além, nada aquém. A credibilidade de um resultado é fundamental. Por exemplo, voltando à área do Brasil, não parece muito mais sensato afirmar seu valor é de (8.500.000 ± 100.000) km$^2$?

Sabe-se que não existe um SM perfeito. Por menores que sejam, os erros de medição provocados pelo SM sempre existem. Logo, não se pode obter um resultado exato de um SM imperfeito. Porém, mesmo com um SM imperfeito é possível obter informações confiáveis.

Neste capítulo serão detalhados os procedimentos que levam a correta determinação do chamado resultado de uma medição (RM), composto de um valor central, o resultado (Rc), e de uma faixa que quantifica a incerteza da medição (IM).

### *7.1. Mensurando Invariável Versus Variável*

Para fins de medição, o mensurando pode ser classificado como variável ou invariável. Será classificado como *invariável* se o seu valor permanece constante durante o período que se está interessado no seu valor. A massa de uma peça metálica isolada do meio ambiente pode ser considerada como um exemplo. A temperatura de uma sala ao longo de um dia, ou em diferentes posições, é um exemplo de mensurando *variável*, isto é, seu valor muda em função do tempo e da posição ao longo da sala.

A rigor, em termos puristas, não existem mensurandos invariáveis. Mesmo a massa de uma peça de platina no vácuo sofre variações ínfimas se forem considerados aspectos relativísticos, uma vez que o universo está em expansão. Porém, em termos práticos, o mensurando será considerado invariável quando suas variações não podem ser detectadas pelo SM em uso. Ou seja, o SM não consegue "enxergar" estas variações por serem inferiores à sua resolução.

O diâmetro de uma peça cilíndrica pode ser considerado como um mensurando variável ou invariável, dependendo do SM utilizado. Imperfeições geométricas na forma cilíndrica fatalmente vão levar a diferentes valores do diâmetro quando medidos em diferentes posições, o que é uma característica de um mensurando variável. Entretanto, se estas variações forem inferiores à menor variação detectável pelo SM em uso, esta peça será "enxergada" pelo SM como invariável. O uso de um outro SM de melhores características poderia levar a uma interpretação diferente. Portanto, a classificação de variável ou invariável não depende somente do mensurando em si, mas da relação das suas características com as do SM:

variável: as variações do mensurando são <u>maiores</u> que a incerteza de medição expandida do SM
invariável: as variações do mensurando são <u>inferiores</u> à incerteza de medição expandida do SM

A incerteza da medição de um mensurando invariável é função das imperfeições do sistema de medição, da ação das grandezas de influência, do operador e do processo de medição em si. Melhorando progressivamente a qualidade ou o controle sobre estes fatores, é possível obter resultados cada vez melhores, isto é, com menor incerteza da medição.

O resultado da medição de um mensurando variável, além de levar em conta os fatores referenciados acima, deverá ainda considerar as variações detectadas no mensurando. Mesmo que sejam melhoradas progressivamente a qualidade e os fatores acima referenciados, não se consegue reduzir abaixo de um patamar mínimo a incerteza da medição, uma vez que não se pode modificar o mensurando e suas variações naturais devem fazer parte do resultado da medição. Se o mensurando varia, o resultado da medição deve registrar esta variação.

## *7.2. Uma Medida Versus Várias Medidas*

Por questões de economia de tempo, comodidade ou praticidade, é comum aplicar uma única vez o SM sobre o mensurando para determinar o resultado da medição (RM). Esta é uma prática muito freqüente na indústria e pode ser perfeitamente correta do ponto de vista metrológico.

A repetição da operação de medição sobre a mesma peça leva mais tempo e exige cálculos adicionais, mas é justificável em duas situações: quando se deseja reduzir a incerteza da medição (IM) ou quando se trata de um mensurando variável. No primeiro caso, a influência do erro aleatório diminui à medida em que são efetuadas várias medidas o que pode vir a reduzir a incerteza da medição, portanto, a parcela de dúvida ainda presente no resultado. Tratando-se de um mensurando variável, deve-se <u>necessariamente</u> efetuar várias medições visando coletar um número suficiente de indicações que permitam caracterizar a faixa de variação do mensurando. Nestes casos, <u>não faz sentido medir apenas uma única vez</u>.

## *7.3. Avaliação do Resultado da Medição de um Mensurando Invariável*

O ponto de partida para a determinação do resultado da medição é a avaliação da incerteza expandida associada ao processo de medição. Para tal, a abordagem apresentada no capítulo 5 deve ser seguida. Informações sobre o sistema de medição, ação das grandezas de influência, interferência do operador, limitações do sistema de medição, número de medições efetuadas, etc, devem ser consideradas.

São estudadas duas situações distintas para a determinação do RM no caso de se tratar de um mensurando invariável, que são função da compensação ou não dos efeitos sistemáticos:

### 7.3.1. Compensando efeitos sistemáticos:

Este caso assume que o balanço de incertezas foi devidamente efetuado e estão disponíveis valores para a correção combinada ($C_c$) e incerteza expandida (U), considerando todas as condições reais do processo de medição, incluindo o número de medições efetuadas e os limites de variação das grandezas de influência.

O resultado é calculado a partir da indicação, ou da média das indicações, conforme o caso, ao qual é adicionada a correção combinada. A parcela de dúvida corresponde à própria incerteza expandida. Assim:

I: indicação obtida

$$RM = I + C_c \pm U_1 \quad (7.1)$$

para o caso em que uma medição apenas foi efetuada, onde:

$C_c$: correção combinada ($C_c$ = - $Td_c$)
$U_1$: incerteza expandida estimada para uma única medição

No caso em que "n" diferentes medições forem efetuadas, o resultado da medição pode ser avaliado a partir da média das "n" indicações disponíveis por:

$$RM = MI + C_c \pm U_n \qquad (7.2)$$

onde:

MI: média das "n" indicações disponíveis
$C_c$: correção combinada ($C_c$ = - $Td_c$)
$U_n$: incerteza expandida estimada considerando a média de "n" medições

### 7.3.2. Não compensando efeitos sistemáticos

Neste caso assume-se que o usuário deliberadamente optou por não compensar os efeitos sistemáticos ou que a respectiva correção combinada não estava disponível. O balanço de incertezas fornece a estimativa da incerteza expandida ($U_1$*), devendo esta ter sido propriamente efetuada, considerando que nenhum dos efeitos sistemáticos foi compensado, as condições reais do processo de medição, incluindo o número de medições efetuadas e os limites de variação das grandezas de influência.

O resultado mais provável é a própria indicação, ou a média das indicações, e a incerteza de medição do resultado é a própria incerteza expandida do processo de medição.

No caso em que apenas uma medição foi efetuada, sendo:

$$RM = I \pm U_1^* \qquad (7.3)$$

I: indicação obtida

$U_1$*: incerteza expandida estimada para uma única medição quando não são compensados os efeitos sistemáticos

No caso em que "n" diferentes medições forem efetuadas, o resultado da medição pode ser avaliado a partir da média das "n" indicações disponíveis por:

$$RM = MI \pm U_n^* \qquad (7.4)$$

onde:

MI: média das "n" indicações disponíveis

$U_n$*: incerteza expandida estimada considerando a média de "n" medições quando não são compensados os efeitos sistemáticos

## *7.4. Avaliação do Resultado da Medição de um Mensurando Variável*

Esta é uma situação onde o valor do mensurando não é único, podendo apresentar variações em função do tempo, do espaço ou de amostra para amostra. O resultado da medição, idealmente, deve exprimir uma faixa que englobe os valores possíveis de serem assumidos pelo mensurando nas condições em que é observado. As incertezas do processo de medição devem também ser consideradas, o que estende a faixa ideal.

Diversas medições *sempre* devem ser realizadas, procurando abranger os diversos valores que possam ser assumidos pelo mensurando. A escolha do número, posição e instante onde a medição será realizada deve ser sempre direcionada para tentar englobar os valores extremos do mensurando.

Define-se a quantidade $\Delta I_{máx}$ como a máxima diferença, em termos absolutos, registrada entre as indicações obtidas e o valor médio MI, isto é:

$$\Delta I_{max} = \left| I_i - MI \right|_{max} \qquad (7.5)$$

onde:

$I_i$ é a i-ésima indicação obtida
MI é o valor médio das indicações

Se as indicações disponíveis foram obtidas de forma a varrer os valores extremos da faixa de variação real do mensurando, $\Delta I_{máx}$ pode ser usada como estimativa para avaliar a extensão desta faixa. É sempre necessário um razoável nível de conhecimento acerca do mensurando para assegurar que a estimativa obtida por (7.5) representa, de fato, as variações associadas ao mensurando. Em função das características do mensurando, outras formas de estimar esta faixa de variações podem vir a ser usadas.

Também aqui são estudadas duas situações distintas para a determinação do RM, classificados em função da compensação ou não dos efeitos sistemáticos:

### 7.4.1. Compensando efeitos sistemáticos:

Além do valor de $\Delta I_{máx}$, estão disponíveis valores para a correção combinada ($C_c$) e incerteza expandida ($U_1$), considerando as condições reais do processo de medição e os limites de variação das grandezas de influência.

O resultado é calculado necessariamente a partir da média das indicações, ao qual é adicionada a correção combinada. A parcela de dúvida corresponde à própria incerteza expandida acrescida da máxima variação da indicação em relação à média das indicações. Assim:

$$RM = MI + C_c \pm (U_1 + \Delta I_{máx}) \qquad (7.6)$$

onde:

MI: média das “n” indicações disponíveis
$C_c$: correção combinada ($C_c$ = - $Td_c$)
$\Delta I_{máx}$: valor absoluto da máxima diferença entre as indicações e seu valor médio

$U_1$:incerteza expandida estimada para uma única medição quando os efeitos sistemáticos são compensados

Note que, por segurança, a incerteza expandida estimada para uma medição (U1) deve ser usada. Embora o resultado envolva a média de várias indicações, deve ser considerado que trata-se de uma grandeza variável. A indicação referente a um ponto extremo do mensurando provavelmente será medida uma única vez e, conseqüentemente, estará exposta aos níveis de variação associados à incerteza expandida para uma medição.

Pela análise da equação (7.6) nota-se que, uma vez expresso numericamente o resultado da medição, não é mais possível identificar na incerteza da medição o quanto corresponde à incerteza do processo de medição e o quanto está associado à variação do mensurando.

### 7.4.2. Não compensando efeitos sistemáticos

Neste caso, o usuário deliberadamente optou por não compensar os efeitos sistemáticos ou não tinha informações disponíveis para tal. O balanço de incertezas deve ter sido realizado de forma a estimar a incerteza expandida ($U_1$*) de forma apropriada, isto é: nenhum dos efeitos sistemáticos foi compensado, apenas uma indicação do mensurando está disponível e efeitos das demais fontes de incerteza nas condições reais do processo de medição.

O resultado base é calculado a partir da média das indicações. A incerteza da medição é estimada pela soma da própria incerteza expandida do processo de medição considerando que apenas uma medição foi realizada e a variação máxima das indicações em relação ao seu valor médio:

$$RM = MI \pm (U_1^* + \Delta I_{máx}) \qquad (7.7)$$

onde:

MI: média das "n" indicações disponíveis
$\Delta I_{máx}$: valor absoluto da máxima diferença entre as indicações e seu valor médio

$U_1$*: incerteza expandida estimada para uma única medição e quando os efeitos sistemáticos não são compensados

## *7.5. Exemplos*

*Exemplo 1: mensurando invariável*

E1a) Quando saboreava seu delicioso almoço no restaurante universitário, um estudante achou uma pepita de ouro no meio da sua comida. Dirigiu-se então a um laboratório com a finalidade de determinar o valor da sua massa por meio de uma balança. O aluno não conseguiu localizar a curva de erros da balança, mas o valor ± 2,0 g, correspondendo a seu erro máximo, estava escrito na bancada. O aluno, inicialmente, mediu apenas uma única vês, tendo obtido como indicação 32,4 g. Qual o valor da massa desta pepita?

Solução:

A massa de uma pepita é um mensurando invariável. Fez-se apenas uma única medição e apenas o erro máximo é conhecido. Os efeitos sistemáticos não poderão ser compensados.
A incerteza expandida da balança não é diretamente conhecida. Entretanto, se for possível considerar que as condições em que a balança está sendo usada correspondem às condições em que seu erro máximo foi levantado, a incerteza expandida da medição coincide com o erro máximo. Assim, o resultado da medição será calculado por (7.3):

$$RM = I \pm U_1^*$$
$$RM = I \pm E_{máx}$$
$$RM = (32,4 \pm 2,0)\ g$$

E1b) Não satisfeito com a incerteza da medição, o aluno obteve as nove indicações adicionais listadas a seguir. Qual o novo resultado da medição ?

32,8 32,7 32,2 32,9 32,5 33,1 32,6 32,4 33,0 g

Solução:

Agora 10 indicações estão disponíveis. É possível calcular o resultado da medição através da média das indicações disponíveis (7.4). A incerteza expandida associada ao processo de medição não é conhecida, mas certamente seria reduzida em função da média de dez medidas ter sido considerada. Entretanto, como não são compensados efeitos sistemáticos, e não se sabe que percentual do erro máximo corresponde aos efeitos aleatórios, por segurança, considera-se que a incerteza ainda coincide com o erro máximo. Assim:

MI = 32,66 g
RM = MI ± $U_n$*
RM = MI ± $E_{máx}$
RM = 32,66 ± 2,0, compatibilizando:
RM = (32,7 ± 2,0) g

E1c)Quando chegava ao trabalho após o período de almoço, o laboratorista, encontrando o felizardo aluno ainda no laboratório, foi buscar o certificado de calibração da balança. Juntos constataram que, para valores do mensurando da ordem de 33 g esta balança apresenta correção de +0,50 g e, após alguns cálculo, verificaram que a incerteza expandida para a média de 10 medições era 0,21 g. Para estas novas condições, qual o resultado da medição ?

Solução:

Neste caso, a média de 10 indicações está disponível, os efeitos sistemáticos podem ser compensados pois a correção é conhecida. O resultado da medição é calculado por:

RM = MI + C ± $U_n$
RM = 32,66 + 0,5 ± 0,21
RM = (33,16 ± 0,21) g

*exemplo 2: mensurando variável*

E2a)Pretende-se determinar o diâmetro de uma dada bola de gude. Para tal, dispõe-se de um paquímetro com erro máximo de ± 0,10 mm, estimado para as condições em que as medições foram efetuadas. Um total de 10 indicações foram obtidas e estão listadas abaixo, realizadas em diferentes posições diametrais, procurando atingir os valores extremos do diâmetro. Qual o diâmetro desta bola de gude?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20,8 | 20,4 | 20,5 | 20,0 | 20,4 |
| 20,2 | 20,9 | 20,3 | 20,7 | 20,6 |

Solução:

Como não se pode esperar "perfeição" na geometria de uma bola de gude, é prudente trata-la como mensurando variável. São disponíveis 10 indicações e uma estimativa do $E_{máx}$, portanto, a equação (7.7) deve ser usada.

Calcula-se inicialmente a média das indicações:
MI = 20,48 mm
Verifica-se que o $\Delta I_{máx}$ ocorre para a indicação 20,0 mm, assim:
$\Delta I_{máx}$ = | 20,0 - 20,48 | = | - 0,48 | = 0,48 mm
Calcula-se o resultado da medição:
RM = MI ± ($U_1$* + $\Delta I_{máx}$)

$RM = MI \pm (E_{máx} + \Delta I_{máx})$
$RM = 20{,}48 \pm (0{,}10 + 0{,}48)$
$RM = (20{,}5 \pm 0{,}6)$ mm

E2b)Numa tentativa de melhorar o resultado da medição, estimou-se a partir de um grande número de medições repetitivas de um bloco padrão de (20,5000 ± 0,0004) mm, que a tendência deste paquímetro é +0,04 mm e sua incerteza expandida 0,05 mm. Com este dado adicional, estime novamente o resultado da medição ?

Solução:

Sendo uma estimativa da tendência conhecida, esta deve ser compensada e o RM calculado pela equação (7.6). Assim:

$RM = MI - Td \pm (U_1 + \Delta I_{máx})$
$RM = 20{,}48 - 0{,}04 \pm (0{,}05 + 0{,}48)$
$RM = (20{,}44 \pm 0{,}53)$ mm

### *7.6. Quadro Geral*

As conclusões dos itens 7.3 e 7.4 permitem construir o seguinte quadro geral para a determinação do resultado da medição (RM).

| Tipo de mensurando | Dados Conhecidos do SM | Número de medições efetuadas | |
|---|---|---|---|
| | | n = 1 | n > 1 |
| Invariável | U* | $RM = I \pm U_1^*$ | $RM = MI \pm U_n^*$ |
| | $C_c$ e U | $RM = I + C_c \pm U_1$ | $RM = MI + C_c \pm U_n$ |
| Variável | U* | não se aplica | $RM = MI \pm (\Delta I_{máx} + U_1^*)$ |
| | $C_c$ e U | não se aplica | $RM = MI + C_c \pm (\Delta I_{máx} + U_1)$ |

onde:

RM é o resultado da medição;
I é a indicação;
MI é a média das indicações;
$C_c$ é a correção combinada do SM ($C_c$ = -Td = - estimativa do Es);

$\Delta I_{máx}$ é o valor absoluto da variação máxima de uma indicação em relação a seu valor médio
$U_1^*$ é a incerteza expandida do processo de medição estimada para uma medição quando não são compensados os efeitos sistemáticos;
$U_n^*$ é a incerteza expandida do processo de medição estimada para a média de "n" medições quando não são compensados os efeitos sistemáticos;

$U_1$ é a incerteza expandida do processo de medição estimada para uma medição quando são compensados os efeitos sistemáticos;

$U_n$ é a incerteza expandida do processo de medição estimada para a média de "n" medições quando são compensados os efeitos sistemáticos;

Na determinação do RM não é suficiente a simples aplicação das equações indicadas no quadro acima. Há necessidade de uma contínua avaliação da confiabilidade dos valores envolvidos, seja das medições efetuadas, seja das características do SM ou do processo de medição, para o qual é necessário o contínuo uso do bom senso.

Para a determinação do RM é fundamental o conhecimento do comportamento metrológico do sistema de medição. Na prática podem ocorrer três casos:

- não existe nenhuma informação à respeito do SM;
- conhece-se apenas uma estimativa do erro máximo obtida através de catálogos ou especificações técnicas do fabricante do SM;
- dispõe-se de certificado de calibração onde estão disponíveis estimativas da Td e incerteza expandida ao longo da faixa de medição.

Infelizmente, com grande freqüência, na prática depara-se com o primeiro caso. No entanto, para poder realizar o trabalho de determinação do RM, é necessário dispor, ao menos, de uma estimativa do erro máximo do sistema de medição. Recomenda-se, sempre que possível, efetuar uma calibração do SM, o que permite melhor caracterizar a estimativas da $C_c$ e U ao longo de toda a faixa de medição. Se não for possível, o SM pode ser submetido a um processo simplificado, onde uma peça de referência, com suas propriedades suficientemente conhecidas, é repetidamente medida e as várias indicações usadas para estimar a $C_c$ e U nas condições de uso.

Em último caso, se nenhuma das alternativas anteriores for possível, e existir urgência em se efetuar as medições, a experiência mostra que, na maioria dos sistemas de medição de qualidade, seu erro máximo normalmente está contido dentro de limites tipicamente dados por:

- para SM com indicação analógica:

$$1 \,.\, VD \leq |E_{máx}| \leq 2 \,.\, VD, \text{ onde VD = valor de uma divisão da escala}$$

- para SM com indicação digital:

$$2 \,.\, ID \leq |E_{máx}| \leq 5 \,.\, ID, \text{ onde ID = incremento digital.}$$

Ao efetuar repetidamente diversas medições, é recomendável observar atentamente as variações de cada indicação em relação ao seu valor médio e procurar identificar eventuais anormalidades. Se este for o caso, deve-se procurar a causa da anormalidade e, eventualmente, eliminar as indicações que apresentam variações atípicas, provocadas por erros de leitura, interferência momentânea sobre o processo ou sistema de medição, etc. Existem procedimentos estatísticos que determinam a existência de valores atípicos em uma amostra: Por exemplo, medidas que se afastam muito da faixa MI ± U provavelmente são afetadas por anormalidades.

Mesmo que considerados os aspectos destacados anteriormente, todo o trabalho de determinação do RM poderá não ser aceito pelo leitor, que questionará a competência do executor, se os valores que compõem o RM não forem apresentados com a devida coerência. A forma recomendada para apresentar o resultado da medição é descrita no anexo IV.

### 7.7. Incerteza da Medição Versus Tolerância do Mensurando

É importante não confundir o intervalo (ou faixa) de tolerância especificada para um determinado componente com a incerteza da sua medição. Se um fabricante deseja que a massa de cada saco de cimento fabricado esteja dentro da tolerância (50,0 ± 1,0) kg, este é o intervalo de tolerância aceitável para cada saco de cimento, isto é, uma faixa de valores aceitáveis. Freqüentemente são especificadas tolerâncias para praticamente qualquer grandeza relevante em um processo ou sistema: as dimensões de uma peça, a temperatura no interior de uma câmara frigorífica, a concentração de uma substância em um processo químico, a tensão elétrica gerada por uma pilha, etc. São limites dentro dos quais deve se situar o parâmetro de interesse, e devem ser rigorosamente levados em conta no processo de fabricação destas.

A obediência às tolerâncias é particularmente importante quando o produto fabricado deverá fazer parte de um sistema composto por outras partes. Se, por exemplo, as dimensões de uma peça estiverem fora do intervalo de tolerâncias, existe forte risco do conjunto da qual esta fará parte não funcionar propriamente, o que representa um desperdício de tempo e material. Pior ainda é a possível redução da qualidade do sistema resultante, comprometendo o nome do fabricante, o que é, hoje, muito grave, especialmente quando se busca competitividade classe mundial.

Para determinar se o valor de uma grandeza encontra-se dentro de um intervalo de tolerância é necessário efetuar sua medição. Como exemplo, suponha que a massa do saco de cimento, que deve estar dentro da tolerância de (50,0 ± 1,0) kg, foi medida por uma balança não apropriada e determinou-se como resultado:

$$RM = (50,8 \pm 0,5) \text{ kg}$$

Neste caso, não é possível afirmar com segurança se a massa deste saco de cimento está ou não dentro da tolerância: o limite superior 51,3 kg encontra-se fora e o inferior: 50,3 kg, dentro. Por este resultado não é possível concluir nada com segurança. Isto se dá porque se escolheu um sistema e/ou procedimento de medição inapropriado para o intervalo de tolerância. É necessário que a incerteza da medição não exceda uma certa fração do intervalo de tolerância.

Teoricamente, quanto menor a incerteza do processo de medição usado para verificar uma dada tolerância, melhor. Na prática, o preço deste processo de medição pode se tornar proibitivo. Procura-se então atingir um ponto de equilíbrio técnico-econômico.

Seja IT o intervalo (ou faixa) de tolerância desejável para a grandeza mensurável, dado por:

IT = valor máximo aceitável - valor mínimo aceitável

A experiência prática mostra que o ponto de equilíbrio é atingido quando a incerteza do processo de medição é não superior a um décimo do intervalo de tolerância, ou seja:

$$U \leq \frac{IT}{10} \tag{7.8}$$

Em casos excepcionais a incerteza pode ser da ordem de 1/5 do intervalo de tolerância.

Um procedimento de medição, usado para decidir se um saco de cimento está ou não dentro da tolerância de (50,0 ± 1,0) kg, (IT = 2,0 kg), deve apresentar incerteza de medição não superior a:

$$U \leq 2,0/10 = 0,2 \text{ kg}$$

Ou seja, no máximo U = 0,2 kg. Neste caso, com o exemplo anterior, ficaria claro que um resultado do tipo RM = (50,8 ± 0,2) kg indicaria um saco de cimento dentro da tolerância.

Na indústria, por questões de praticidade e economia de tempo, não é raro efetuar uma única medição, sem compensar os erros sistemáticos, para decidir se uma peça está ou não dentro da tolerância. A equação (7.8) continua válida, mas, neste caso, a incerteza da medição deve ser estimada para estas condições de medição.

Mesmo com os limites estabelecidos pela equação (7.8), ainda restarão casos onde não será possível afirmar, com 100% de segurança, que uma peça está ou não dentro do intervalo de tolerância. Ainda no exemplo do saco de cimento, se o RM fosse (50,9 ± 0,2) kg, haveria dúvida. Assim, é possível caracterizar as três zonas representadas na figura 7.1: a zona de conformidade, a zona de não conformidade e a zona de dúvida:

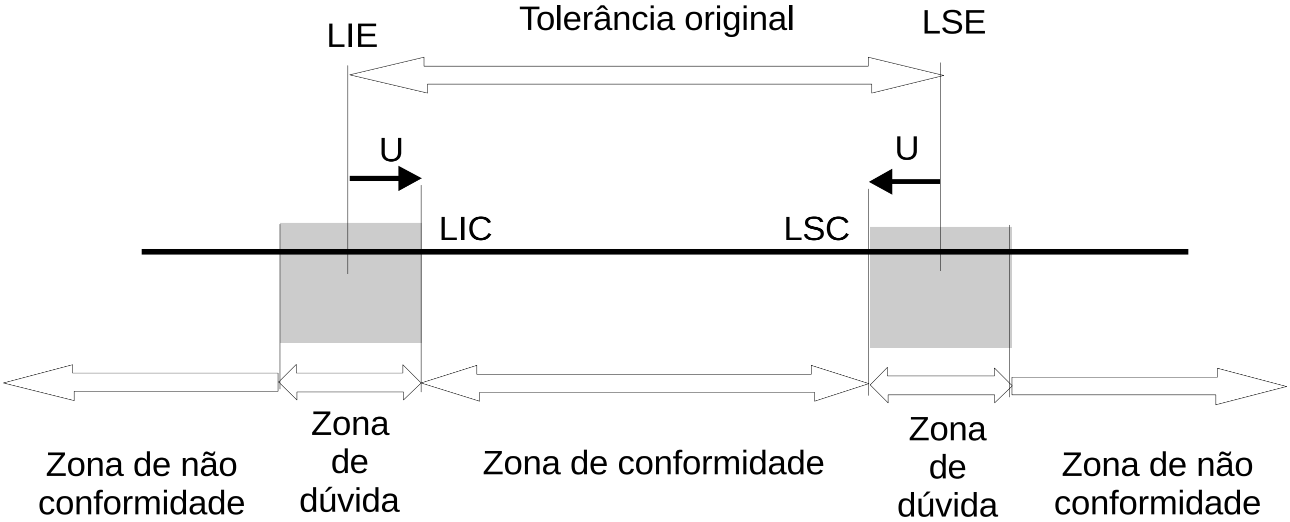



Figura 7.1 – Zonas de conformidade, não conformidade e de dúvida ao verificar-se uma tolerância.

Seja LIE o limite inferior da especificação e LSE o limite superior da especificação contida na tolerância original. O resultado base (RB) de uma grandeza, para que seja considerada dentro da tolerância, deve, segundo a especificação, estar dentro do intervalo: LIE ≤ RB ≤ LSE. Porém, em função da incerteza do processo de medição, só é possível afirmar que a peça atende a tolerância se estiver dentro da denominada zona de conformidade, representada na figura 7.1. Note que a zona de conformidade é menor que a tolerância original. de um valor correspondente a duas vezes a incerteza expandida do processo de medição. Novos limites, denominados de “limites de controle” são então definidos:

LIC = LIE + U (limite inferior de controle)
LSC = LSE - U (limite superior de controle)

Os limites de controle são usados no processo para verificar se uma peça está dentro da tolerância. Se obedecer à condição LIC ≤ RB ≤ LSC, será considerada como em conformidade. Se não obedece à condição, mas está dentro da faixa de dúvida (cinza na figura) não é possível afirmar, com este sistema de medição, que se trata de uma peça fora da especificação. Se estiver na zona de conformidade, é possível afirmar com segurança que está fora da especificação.

Um processo de fabricação bem balanceado, são poucos os produtos não conformes. O número de peças duvidosas não será grande, não sendo este um grande problema. Porém, se necessário, as peças duvidosas podem vir a ser novamente inspecionadas por um outro processo de medição com menor incerteza com o qual será possível classificar corretamente algumas peças adicionais, porém, ainda restarão peças duvidosas.

*Problemas propostos*

1. Determine se, em cada uma das situações abaixo, o mensurando deve ser considerado como variável ou invariável:
a) a altura de um muro medida com uma escala com valor de uma divisão de 1 mm;
b) a altura de um muro medida com uma escala com valor de um divisão de 50 mm;
c) a salinidade da água do mar;
d) o diâmetro de uma moeda de R$ 0,50 medido com escala com valor de uma divisão de 1 mm;
e) a temperatura no interior da chaminé de uma fábrica enquanto as máquinas estão ligadas;
f) a massa de um adulto durante cinco minutos, medida em balança com incerteza ± 0,2 kg;
g) o diâmetro de um eixo cilíndrico desconhecido;

2. Qual o resultado da medição da distância entre as estações rodoviárias de Florianópolis e Curitiba, efetuada por meio do odômetro de um automóvel, cuja incerteza expandida, para as condições da medição, é de 0,2 %, sendo que a indicação obtida foi de 311,2 km ?

3. Para determinar o diâmetro de um tarugo de um poste de concreto um operário usou um sistema de medição com incerteza expandida 0,2 mm. Foram obtidas 12 indicações em diferentes posições e alturas, conforme listagem abaixo. Qual o diâmetro deste poste ?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 580,2 | 574,4 | 582,8 | 577,0 | 569,8 | 582,2 |
| 579,0 | 582,2 | 584,2 | 573,8 | 570,2 | 582,8 |

4. Um balança com incerteza expandida de 50 mg foi usada para determinar a massa de um diamante cor-de-rosa. Encontrou-se a indicação 6,962 g. Qual o resultado da medição ?

5. Não convencido com a medição da questão anterior, o dono do diamante solicitou uma calibração da balança. Para tal, uma massa padrão de (7,000 ± 0,001) g foi então medida seis vezes pela balança, sendo encontradas as indicações listadas abaixo (todas em g). Com estes dados, determine a Re e a Td desta balança e o novo resultado da medição considerando que, quando a tendência é devidamente compensada, nas condições de medição sua incerteza expandida é reduzida para 28 mg.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6,979 | 6,964 | 6,968 | 6,972 | 6,971 | 6,966 |

6. Ainda não convencido, o dono do diamante solicitou que fossem efetuadas algumas medições adicionais. As indicações obtidas encontram-se abaixo (em g). No caso em que a tendência é compensada e a média de 7 indicações é efetuada, a incerteza expandida é reduzida para 0,18 g. Qual o novo RM ?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6,962 | 6,970 | 6,964 | 6,977 | 6,966 | 9,969 |

7. A polia de um motor de toca-discos deve possuir dimensões dentro da tolerância de (15,00 ± 0,02) mm. Especifique as características necessárias a um processo de medição adequado para classificar as peças disponíveis como dentro ou fora da tolerância e os limites de controle.

8. Quantifique os limites para as zonas de conformidade, de não conformidade e de dúvida para a tolerância (6,00 ± 0,01) mm quando:

a) é usado um sistema de medição que obedece a equação U = IT/10

b) é usado um sistema de medição que obedece a equação U = IT/5

# Capítulo 8

# AVALIAÇÃO DA INCERTEZA EM MEDIÇÕES INDIRETAS

Este capítulo aborda procedimentos para estimar a incerteza associada à medição em casos onde o valor do mensurando não pode ser determinado diretamente a partir da indicação vinda de um único instrumento de medição, mas deve ser calculada por uma equação que relaciona diversas grandezas de entrada medidas independentemente. Estimativas iniciais das incertezas padrão associadas a cada uma destas grandezas de entrada são o ponto de partida para os procedimentos aqui apresentados.

## *8.1. Considerações preliminares*

### 8.1.1. Medições diretas e indiretas

Na medição direta o valor associado ao mensurando resulta naturalmente da aplicação do sistema de medição sobre este. Há interesse focado apenas em uma grandeza. A medição de um diâmetro com um paquímetro, da temperatura de uma sala por um termômetro são exemplos de medição direta.
A medição indireta envolve a determinação do valor associado ao mensurando a partir da combinação de duas ou mais grandezas por meio de expressões matemáticas. São exemplos de medição indireta: a) a determinação da área de uma parede a partir da multiplicação dos valores medidos para sua largura e altura, b) a determinação da massa específica de um material calculada a partir da razão entre sua massa e seu volume e c) a medição da corrente que passa por um condutor a partir da divisão da queda de tensão medida sobre um resistor de precisão em série com o condutor pelo valor da sua resistência elétrica.
Embora menos prática que a medição direta, a medição indireta é utilizada com muita freqüência, principalmente em casos onde: a) por impossibilidade física não é viável fazer medições diretas e b) do ponto de vista econômico, ou, no que diz respeito ao nível de incerteza possível de ser obtida, é mais vantajoso efetuar medições indiretas.

### 8.1.2. Dependência estatística

Como visto no capítulo 5, duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente independentes se suas variações se comportam de forma totalmente desvinculadas, isto é, não há nenhuma relação entre o crescimento momentâneo e aleatório de uma e o crescimento (ou decrescimento) da outra. Do ponto de vista estatístico estas variáveis são ditas não correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é zero.
Duas variáveis aleatórias são ditas estatisticamente dependentes se suas variações se dão de forma vinculadas, isto é, há uma relação nitidamente definida entre o crescimento de uma e o crescimento da outra de forma proporcional à primeira. Do ponto de vista estatístico estas variáveis são ditas correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é unitário (+1). Há ainda o caso em que o crescimento da primeira está nitidamente atrelado ao decrescimento proporcional da segunda. Neste caso estas variáveis são ainda ditas correlacionadas, e seu coeficiente de correlação é também unitário porém negativo (-1).
Duas variáveis aleatórias podem apresentar dependência estatística parcial, isto é, nem são totalmente dependentes nem totalmente independentes. Nestes casos, o coeficiente de correlação entre estas variáveis pode assumir qualquer valor não inteiro entre -1 e +1.
A indicação de um módulo ou sistema de medição pode ser tratada como variável aleatória. As variações observadas em uma série de indicações obtidas de medições sucessivas, realizadas nas mesmas condições e sobre o mesmo mensurando, são manifestação desta parcela aleatória. Os fatores que provocam esta aleatoriedade são diversos, podendo ter origem interna no próprio sistema de medição, ou resultarem de efeitos provocados por grandezas de influência externas.
Nos casos onde dois ou mais módulos da cadeia de medição estão expostos às mesmas grandezas de influência, e seus comportamentos são particularmente sensíveis a uma ou mais destas grandezas de

influência, é muito provável que as indicações destes módulos apresentem dependência estatística. Flutuações aleatórias das grandezas de influência podem provocar alterações correlacionadas em cada módulos. Quando as principais grandezas de influência são relativamente bem controladas, as variações em cada módulos possuem uma série de causas secundárias, o que resulta, com grande probabilidade, em independência estatística.

Embora grande parte das variáveis aleatórias envolvidas na medição seja parcialmente dependentes, para tornar o cálculo de incertezas mais facilmente executável, é prática comum aproximar seu comportamento e classificá-las como totalmente dependentes ou independentes. Apenas em situações muito raras a dependência estatística parcial é considerada.

O parâmetro chave para caracterizar a dependência estatística é o coeficiente de correlação linear.([iii])

## *8.2. Grandezas de entrada estatisticamente dependentes*

No caso em que há dependência estatística entre as variáveis de entrada, a variação aleatória associada a cada grandeza de entrada poderá estar agindo da mesma maneira sobre as respectivas indicações. Para estimar a incerteza da combinação de duas ou mais grandezas de entrada estatisticamente dependentes, deve ser levado em conta que estas podem assumir, ao mesmo tempo, valores extremos dentro de suas respectivas faixas de incerteza. O valor estimado geralmente representa os limites da variação máxima possível.

Embora exista uma expressão geral para a estimativa da incerteza associada à combinação de grandezas de entrada estatisticamente dependentes, há casos particulares, freqüentemente presentes na prática, onde as equações são drasticamente simplificadas. A soma e subtração e a multiplicação e divisão são dois grupos de operações onde são possíveis simplificações consideráveis e serão inicialmente tratados.

### 8.2.1. Soma e subtração

A combinação das incertezas de grandezas de entrada estatisticamente dependentes que são apenas somadas ou subtraídas entre si é muito simples, e pode ser intuída por simples observação. Seja o caso onde deseja-se somar o valor de duas massas conhecidas, determinadas a partir de uma mesma balança e nas mesmas condições de medição dadas por:

$$\mathbf{m_1 = (200 \pm 4)\ g}$$
$$\mathbf{m_2 = (100 \pm 3)\ g}$$

O valor mínimo possível desta soma pode ser calculado por:

$$\begin{aligned}(m1 + m2)_{min} &= (200 - 4) + (100 - 3)\\ &= (200 + 100) - (4 + 3)\\ &= 300 - 7 = 293 \text{ g}\end{aligned}$$

Analogamente, o valor máximo possível é obtido por:

$$\begin{aligned}(m1 + m2)_{max} &= (200 + 4) + (100 + 3)\\ &= (200 + 100) + (4 + 3)\\ &= 300 + 7 = 307 \text{ g}\end{aligned}$$

---

[iii] A rigor, duas variáveis aleatórias podem apresentar dependência estatísticas não linear. Neste caso, o tratamento estatístico difere do apresentado neste capítulo, e não será tratado neste texto.

O que leva ao resultado:

**$m_1$ + $m_2$ = 300 ± 7 g**

Por observação, nota-se que a incerteza de 7 g resulta da soma das incertezas 3 g e 4 g. De fato, esta regra é válida tanto para soma quanto para subtração, como pode ser facilmente verificado.
Esta mesma regra continua válida para qualquer número de termos envolvidos, desde que apenas somas e/ou subtrações estejam presentes no cálculo. Porém, recomenda-se combinar as incertezas padrão de cada variável de entrada e, somente após obter a incerteza padrão combinada, estimar a incerteza expandida. Em termos genéricos, pode-se escrever:

$$u(x1 \pm x2 \pm x3 \pm \ldots) = u(x1) + u(x2) + u(x3) + \ldots \qquad (8.1)$$

ou seja:

> *na soma ou subtração de qualquer número de grandezas de entrada estatisticamente dependentes, a incerteza padrão combinada do resultado pode ser estimada pela soma algébrica das incertezas padrão individuais de cada grandeza envolvida*

É também possível mostrar que:

$$u(k1.x1 \pm k2.x2 \pm k3.x3 \pm \ldots) = k1.u(x1) + k2.u(x2) + k3.u(x3) + \ldots \qquad (8.1a)$$

onde k1, k2, k3, … , são constantes multiplicativas

8.2.2. Multiplicação e divisão

Também neste caso, através de um exemplo simples, é possível intuir a expressão para a estimativa da incerteza combinada: Seja *V* o volume de um paralelepípedo calculado pelo produto dos seus lados: *a, b e c*, cada qual conhecido com incertezas *u(a), u(b) e u©* respectivamente e estatisticamente independentes entre si. Logo:

$$V \pm u(v) = (a \pm u(a)) . (b \pm u(b)) . (c \pm u(c))$$

Expandindo a expressão acima:

$$V \pm u(v) = a.b.c \pm b.c.u(a) \pm a.c.u(b) \pm a.b.u(c) \pm$$
$$\pm a.u(b).u(c) \pm b.u(a).u(c) \pm c.u(a).u(b) \pm u(a).u(b).u(c)$$

Subtraindo *V* = *a.b.c* de ambos os lados e desprezando os termos de ordens mais altas, obtém-se:

$$u(v) = b.c.u(a) + a.c.u(b) + a.b.u(c)$$

Dividindo ambos os termos desta equação por *V* = *a.b.c*, obtém-se finalmente:

$$\frac{u(v)}{V} = \frac{u(a)}{a} + \frac{u(b)}{b} + \frac{u(c)}{c}$$

*u(v)/V, u(a)/a, u(b)/b e u(c)/c* são as incertezas relativas de cada grandeza. Assim, verifica-se que na multiplicação a incerteza relativa do resultado é estimada pela soma das incertezas relativas de cada grandeza de entrada. Pode-se verificar que esta conclusão também vale para a divisão e também para qualquer número ou combinações entre multiplicações e divisões.

**Assim, pode ser escrito de forma genérica que:**

$$\frac{u(x1.x2.x3.\ldots)}{x1.x2.x3.\ldots} = \frac{u(x1)}{x1} + \frac{u(x2)}{x2} + \frac{u(x3)}{x3} + \ldots$$

$$e \qquad (8.2)$$

$$\frac{u(x1/x2/x3/\ldots)}{x1/x2/x3/\ldots} = \frac{u(x1)}{x1} + \frac{u(x2)}{x2} + \frac{u(x3)}{x3} + \ldots$$

ou seja:

> *na multiplicação e/ou divisão de várias grandezas de entrada estatisticamente dependentes, a incerteza padrão relativa combinada é obtida pela soma das incertezas padrão relativas de cada grandeza de entrada envolvida*

a) Exemplo 1:
Determinação da incerteza padrão associada à medição da área de um círculo, cujo diâmetro foi medido com incerteza padrão já estimada. $A = ¼\ \pi\ d^2$, sendo d = 30,02 mm, com incerteza padrão u(d) = 0,05 mm. A expressão para o cálculo da área pode ser reescrita como:

**A = ¼ π d d**

que se trata apenas de multiplicações. Neste caso, a equação (8.2) pode ser empregada:

**u(A)/A = u(¼)/(¼) + u(π)/π + u(d)/d + u(d)/d**

Porém, ¼ é um número matematicamente exato, sua incerteza é nula o que também anula o termo u(¼)/(¼).π pode ser hoje calculado com centenas de casas decimais. A incerteza no valor de π é muito mais conseqüência do erro de truncamento quando se considera apenas algumas casas decimais. Se um número suficiente de dígitos for considerado, o termos u(π)/π pode ser desprezado frente ao u(d)/d. Assim, tem-se:

**u(A)/A = 2 u(d)/d, ou**

ou

**u(A)/A = 2 . 0,05/30,02**
**u(A)/A = 0,00333**
**u(A) = 0,00333 . (¼ (π 30,02)²**
**u(A) = 2,36 mm²**

b) Exemplo 2:
Determinar a incerteza da grandeza (G) calculada por: G = (a+b)/c, sabendo-se que a, b e c são estatisticamente dependentes.
Embora trate-se de uma combinação entre soma e divisão, o cálculo da incerteza pode ser efetuado por etapas. Para tal, seja d = a + b, logo:

**u(d) = u(a+b) = u(a) + u(b)**

e

**u(G)/G = u(d)/d + u(c)/c**

**obs**:o procedimento ilustrado neste exemplo em particular, onde são combinadas soma/subtração com multiplicação/divisão por meio de variáveis intermediárias, só pode ser efetuado se estas variáveis são independentes. Não seria possível, por exemplo, aplicar este procedimento para H = (a+b)/(a-b). Estes casos são tratados no item seguinte.

8.2.3. Caso geral

A estimativa da incerteza combinada para o caso geral onde as grandezas de entrada se relacionam através de uma expressão matemática qualquer pode ser efetuada através da aplicação de uma expressão genérica. Sua demonstração matemática é baseada na expansão da expressão em termos de série de Taylor e não será tratada neste texto. Seja, por exemplo, uma grandeza *G* calculada em função de diversas grandezas de entrada relacionadas por:

**G = f(x1, x2, x3, x4, ...)**

Após a expansão em série de Taylor, eliminação de termos de ordens mais altas e redução de termos semelhantes chega-se a:

$$u(G) = \left|\frac{\partial f}{\partial x1}\right| u(x1) + \left|\frac{\partial f}{\partial x2}\right| u(x2) + \left|\frac{\partial f}{\partial x3}\right| u(x3) + \left|\frac{\partial f}{\partial x4}\right| u(x4) + \ldots \tag{8.3}$$

onde:

**u(G) representa a incerteza padrão da grandeza G**

**u(x1), u(x2), u(x3), u(x4), ... representam as incertezas padrão associadas às grandezas de entrada x1, x2, x3, x4, ... respectivamente**

**| | representa o módulo (valor absoluto) da expressão do seu interior**

É muito fácil verificar que as equações (8.1) e (8.2) são casos particulares da equação (8.3).

### *8.3. Grandezas de entrada estatisticamente independentes*

No caso em que as grandezas de entrada não apresentam dependência estatística entre si, dificilmente as variações aleatórias associadas a cada grandeza de entrada estarão agindo sincronizadamente e da mesma maneira sobre todas estas grandezas. A estimativa da incerteza padrão combinada de duas ou mais grandezas de entrada estatisticamente independentes deve levar em conta aspectos probabilísticos. O valor estimado para a incerteza padrão combinada geralmente é consideravelmente menor do que o valor obtido se as grandezas de entrada fossem tratadas como estatisticamente dependentes.
Embora, também neste caso, exista uma expressão geral para a estimativa da incerteza padrão associada à combinação de grandezas de entrada estatisticamente independentes, há casos particulares, freqüentemente presentes na prática, onde as equações são drasticamente simplificadas.

8.3.1. Soma e subtração

A soma de duas variáveis aleatórias estatisticamente independentes é um problema já bastante estudado pela estatística. O valor médio da soma pode ser estimado pela soma dos valores médios de cada variável. A variância da soma pode ser estimada a partir da soma das variâncias de cada variável. Para a subtração, o comportamento é similar.
A incerteza padrão associada às grandezas de entrada estatisticamente independentes tem um comportamento estatístico semelhante ao do desvio padrão quando estas são combinadas. Assim, uma expressão geral para a estimativa da incerteza combinada associada à somas e/ou subtrações de duas ou mais grandezas de entrada estatisticamente independentes é dada por:

$$u^2(x1 \pm x2 \pm x3 \pm \ldots) = u^2(x1) + u^2(x2) + u^2(x3) + \ldots \qquad (8.4)$$

ou seja:

| |
|---|
| *na soma e subtração de várias grandezas de entrada estatisticamente independentes, o quadrado da incerteza padrão combinada é obtida pela soma dos quadrados das incertezas padrão de cada grandeza de entrada envolvida* |

Exemplo:

Considerando que as massas $m_1$ e $m_2$ dadas por:

$m_1 = 200$ com $u(m_1) = 4$ g

$m_2 = 100$ com $u(m_2) = 3$ g

foram medidas por balanças e em condições completamente diferentes e independentes, determine a incerteza associada à sua soma.
Neste caso, é razoável tratar estas grandezas de entrada como estatisticamente independentes. Assim, a incerteza combinada pode ser estimada por:

$$u(m_1 + m_2) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

A massa resultante será:

**$m_1 + m_2 = 300$ g com $u(m_1 + m_2) = 5$ g**

Note que o valor estimado para a incerteza padrão da soma neste caso é inferior a 7 g, o que seria encontrado caso estas variáveis fossem tratadas como estatisticamente dependentes.

8.3.2. Multiplicação e divisão

Neste caso, uma expressão indicada para estimar a incerteza resultante da combinação de apenas multiplicações e/ou divisões de qualquer número de variáveis de entrada estatisticamente independentes pode ser deduzida.
Seja G a grandeza de interesse calculada por multiplicações e/ou divisões de várias grandezas de entrada, simbolicamente representadas por:

**$G = (x1)^{\pm 1} \cdot (x2)^{\pm 1} \cdot (x3)^{\pm 1} \cdot \ldots$**

A incerteza relativa combinada pode ser estimada por:

$$\left(\frac{u(G)}{G}\right)^2 = \left(\frac{u(x1)}{x1}\right)^2 + \left(\frac{u(x2)}{x2}\right)^2 + \left(\frac{u(x3)}{x3}\right)^2 + \ldots \qquad (8.5)$$

o que permite formar o seguinte enunciado:

> *na multiplicação e divisão de várias grandezas de entrada estatisticamente independentes, o quadrado da incerteza padrão relativa combinada é obtida pela soma dos quadrados das incertezas padrão relativas de cada grandeza de entrada envolvida*

Exemplo:

Determine a incerteza padrão associada à corrente elétrica que passa por um resistor R previamente conhecido de 500,0 Ω com incerteza padrão u(R) = 0,5 Ω, sobre o qual mediu-se a queda de tensão de V = 150,0 V com u(V) = 1,5 V.

A expressão para o cálculo da corrente é dada por I = V/R. Este caso envolve apenas divisão de duas grandezas de entrada que, como foram medidas independentemente por instrumentos diferentes, podem ser tratadas com estatisticamente independentes. Assim, sendo o valor esperado para a corrente dado por:

I = 150/500 = 0,30 A

Sua incerteza pode ser estimada por:

$$\left(\frac{u(I)}{I}\right)^2 = \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 \text{, ou}$$

$$\left(\frac{u(I)}{0{,}3}\right)^2 = \left(\frac{1{,}5}{150}\right)^2 + \left(\frac{0{,}5}{500}\right)^2$$

$$\left(\frac{u(I)}{0{,}3}\right)^2 = (0{,}01)^2 + (0{,}001)^2 = 0{,}0001 + 0{,}000001$$

u(I) = 0,003 A

Assim:

I = 0,300 A e sua incerteza padrão u(I) = 0,003 A

Note que, neste caso, a contribuição na incerteza associada à tensão elétrica tem uma influência 100 vezes maior do que a incerteza da resitência sobre a estimativa da incerteza da corrente. É óbvio que, se for desejável reduzir a incerteza do valor da corrente, a incerteza da medição da tensão precisa ser reduzida. De nada adiantaria reduzir a incerteza da resistência elétrica apenas.

### 8.3.3. Caso geral

Há uma expressão genérica que permite estimar a incerteza padrão combinada para o caso geral onde apenas grandezas de entrada estatisticamente independentes se relacionam através de uma expressão matemática. Seja, por exemplo, uma grandeza *G* calculada em função de diversas grandezas de entrada relacionadas por:

**G = f(x1, x2, x3, x4, ...)**

A incerteza combinada da grandeza G pode ser estimada por:

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial f}{\partial x1}.u(x1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x2}.u(x2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x3}.u(x3)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x4}.u(x4)\right)^2 + \ldots \qquad (8.6)$$

onde:

**u(G) representa a incerteza padrão da grandeza G**

**u(x1), u(x2), u(x3), u(x4), ... representam as incertezas padrão associadas às grandezas de entrada x1, x2, x3, x4, ... respectivamente**

Também neste caso é fácil verificar que as equações (8.4) e (8.5) são casos particulares da equação (8.6).
Exemplo:
Na determinação da massa específica (ρ) de um material usou-se um processo indireto, medindo-se com uma balança a massa (m) de um cilindro cujo diâmetro (D) e altura (h) foram determinados por um micrômetro e um paquímetro respectivamente. Após a estimativa das incertezas padrão associadas, foram encontrados os seguintes resultados para cada grandeza medida:

| | |
|---|---|
| m = 1580 g | u(m) = 10 g |
| D = 25,423 mm | u(D) = 0,003 mm |
| h = 77,35 mm | u(h) = 0,05 mm |

A massa específica é calculada por:

$$\rho = \frac{m}{Vol} = \frac{4m}{\pi D^2 h}$$

Como tratam-se de grandezas estatisticamente independentes, a equação (8.6) deve ser aplicada para determinar a incerteza padrão combinada u(ρ).
A equação (8.6) envolve as derivadas parciais de ρ em relação a cada grandeza independente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi D^2 h}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = \frac{-4m}{\pi D^2 h^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial D} = \frac{-8m}{\pi D^3 h}$$

que leva a:

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{4}{\pi D^2 h}.u(m)\right)^2 + \left(\frac{-4m}{\pi D^2 h^2}.u(h)\right)^2 + \left(\frac{-8m}{\pi D^3 h}.u(D)\right)^2} \qquad (8.7)$$

Esta equação permite estimar a incerteza associada à massa específica obtida nas condições especificadas. Entretanto, esta equação pode ser rearranjada de forma a tornar-se mais simples. Para tal, sejam ambos os membros divididos por ρ. Assim:

$$\frac{u(\text{r})}{\text{r}} = \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(2\frac{u(D)}{D}\right)^2} \tag{8.8}$$

que é o mesmo resultado que se obtém pela aplicação da equação (8.5).
Substituindo os valores de m, D, h e suas incertezas padrão na equação (8.8) chega-se a:

$$\frac{u(\text{r})}{\text{r}} = \pm \frac{1}{10000} \sqrt{(63{,}3)^2 + (2{,}36)^2 + (6{,}46)^2}$$

$$ou$$

$$\frac{u(\text{r})}{\text{r}} = \pm \frac{1}{10000} \sqrt{4006{,}1 + 5{,}6 + 41{,}7}$$

Portanto a massa específica do material poderá ser dada como.

$$\text{r} = \frac{4\,.m}{\text{p}\,.D^2\,.h}$$

$$\text{r} = \frac{4\,,1580}{3{,}1416\,.(25{,}423)^2\,.77{,}35}$$

$$\text{r} = 0{,}040239\ g/mm^3$$

daí:

$$u\ \text{r}) = 0{,}00637\,.$$

$$u(\text{r} = 0{,}0002563\ \ /mm$$

ou seja:

$$\text{r} = 0{,}04024\ g/mm^3 \qquad e \quad u(\text{r}) = 0{,}00025 g/mm^3$$

O exemplo mostra claramente que a incerteza padrão combinada está sendo fortemente afetada pela incerteza da massa, em função desta ter incerteza padrão relativa superior às demais grandezas. Uma melhora no resultado da medição só será alcançada buscando-se reduzir a incerteza de medição da massa até níveis em que haja uma equiparação com a incerteza de medição relativa associada às outras grandezas.

### *8.4. Dependência estatística parcial*

Há casos mais complexos onde as interações entre grandezas de entrada que componhem uma medição direta não podem ser realisticamente modeladas como sendo completamente estatisticamente dependentes e nem independentes. Pode haver dependência estatística parcial. A forma de quantificar a dependência estatística linear parcial é através do coeficiente de correlação linear entre cada par de grandezas de entrada envolvidas. Haverá dependência parcial se o coeficiente de correlação for um número não inteiro.

### 8.4.1. Combinação de grandezas estatisticamente dependentes e independentes

Será inicialmente abordado o caso onde apenas combinações de grandezas de entrada estatisticamente dependentes e independentes são envolvidas. Sejam por exemplo as grandezas a, b e c onde sabe-se, *a priori*, que:

**a e b são estatisticamente dependentes (r(a,b) = 1)**
**a e c e b e c são estatisticamente independentes entre si ( r(a,c) = 0 e r(b,c) = 0)**

A incerteza padrão combinada da grandeza G dada por: G = f(a, b, c) pode ser estimada por:

$$u^2(G) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}.u(a) + \frac{\partial f}{\partial b}.u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}.u(c)\right)^2 \qquad (8.9)$$

### 8.4.2. Caso geral

A expressão usada para estimar a incerteza padrão combinada de uma grandeza G dada por:
G = f(x1, x2, x3, ..., xn)
considerando que pode haver dependência estatística parcial entre cada par das grandezas de entrada x1, x2, x3, ... ,xn, é dada por:

$$u^2(G) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i).u(x_j).r(x_i,x_j) \qquad (8.10)$$

onde r(xi, xj) é o coeficiente de correlação entre as grandezas de entrada xi e xj.
Exemplo:
Seja o volume V de um paralelepípedo determinado a partir do produto dos comprimentos de cada um dos seus lados. Os lados “a” e “b” foram medidos por um mesmo sistema de medição e nas mesmas condições. O lado “c” foi medido por outro instrumento independente e em momentos distintos. Determine a incerteza padrão do volume.
Solução:
Em função de um mesmo instrumento ter sido usado para medir os lados “a” e “b”, é provável que estas grandezas de entrada estejam fortemente correlacionadas. Este fato deveria ser verificado experimentalmente pelo cálculo do coeficiente de correlação entre “a” e “ b”, “b” e “c” e entre “a” e “c”. Para três grandezas de entrada, a equação (8.10) resume-se a:

$$u^2(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial a}u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}u(b)\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}u(c)\right)^2 + 2\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial V}{\partial b}u(a)u(b)r(a,b) +$$
$$+2\frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial V}{\partial c}u(b)u(c)r(b,c) + 2\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial V}{\partial c}u(a)u(c)r(a,c)$$

Assume-se aqui que r(a, b) = 1. Como a medição do lado “c” é independente das demais, assume-se r(b, c) = 0 e r(a, c) = 0. Assim, sendo V = a.b.c, estes dados aplicados na equação acima ficam:

$$u^2(V) = (b.c.u(a))^2 + (a.c.u(b))^2 + (a.b.u(c))^2 + 2.bc.ac.u(a).u(b).1$$

dividindo ambos os membros por $V^2$, a equação acima fica:

$$\left(\frac{u(V)}{V}\right)^2 = \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{u(a)}{a}\frac{u(b)}{b}\right)$$

Note que há um quadrado perfeito no segundo termo que pode ser reagrupado como:

$$\left(\frac{u(V)}{V}\right)^2=\left(\frac{u(a)}{a}+\frac{u(b)}{b}\right)^2+\left(\frac{u(c)}{c}\right)^2$$

Que é a solução do problema. A expressão acima também poderia ser diretamente obtida da aplicação da equação (8.9).

### *8.5. Incerteza padrão e incerteza expandida*

Recomenda-se que a incerteza associada à medição indireta seja estimada através das estimativas das incertezas padrão de cada grandeza de entrada. Somente após obter a incerteza padrão combinada da medição indireta, determina-se a correspondente incerteza expandida.
Também neste caso, a incerteza expandida é estimada pela multiplicação da incerteza padrão combinada pelo fator de abrangência. O fator de abrangência é determinado em função do número de graus de liberdade efetivo, obtido a partir da equação de Welch-Satterthwaite (5.17), conforme abordado no capítulo 5. O fator de abrangência é obtido da tabela de coeficientes também apresentada neste capítulo.
O número de graus de liberdade de cada grandeza de entrada corresponde ao número de graus de liberdade efetivo encontrado por ocasião da sua estimativa. Se esta informação não é disponível, deve ser aproximadamente estimado em função das condições de medição. Após o cálculo de $\upsilon_{ef}$, determina-se $k_{95}$ e, finalmente:

$$\mathbf{U_{95} = k_{95} \, . \, u}$$

### *8.6. Problema resolvido*

Determine a incerteza na determinação da velocidade média de um projétil a partir do tempo "t" que este leva para percorrer a distância "d" entre dois sensores. A distância foi medida, sendo encontrado d = (182,4 ± 0,4) m, determinado com 20 graus de liberdade efetivos e t = (52,6 ± 0,3) ms, determinado com 12 graus de liberdade, já incluindo a influência dos sensores e suas imperfeições.
Solução:
A velocidade média é calculada por V = d/t. Por serem medidas por instrumentos diferentes e, provavelmente, em momentos diferentes, as grandezas "d" e "t" certamente são estatisticamente independentes. A equação (8.5) pode ser usada para estimar a incerteza de V.
Para aplicar esta equação, deve-se utilizar as incertezas padrão de "d" e "t", o que pode ser obtido a partir da divisão da incerteza expandida pelo respectivo fator de abrangência. Os valores de $k_{95}$ para 20 e 12 graus de liberdade são 2,13 e 2,23 respectivamente. Assim:

**u(d) = 0,4/2,13 = 0,188 m**
**u(t) = 0,3/2,23 = 0,135 ms**

A incerteza padrão combinada pode ser determinada por:

$$\left(\frac{u(V)}{V}\right)^2=\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2+\left(\frac{u(t)}{t}\right)^2$$

Sendo o valor nominal de dado por: V = 182,4 m/52,6 ms = 3467,7 m/s, a estimativa da incerteza padrão u(V) será

$$\left(\frac{u(V)}{3467,7}\right)^2=\left(\frac{0,188}{182,4}\right)^2+\left(\frac{0,135}{52,6}\right)^2$$

**u(V) = 9,59 m/s**

O número de graus de liberdade será:

$$\nu_{ef} = \frac{\left(\frac{u(V)}{V}\right)^4}{\frac{\left(\frac{u(d)}{d}\right)^4}{\nu_d} + \frac{\left(\frac{u(t)}{t}\right)^4}{\nu_t}} = 15{,}9$$

Logo, $k_{95} = 2{,}17$

Assim, a incerteza expandida será:
$U_{95}(V) = 2{,}17 \cdot 9{,}59 = 20{,}8$ m/s com $\nu = 16$
E a velocidade poderá finalmente ser expressa por:

**V = (3468 ± 21) m/s.**

# Capítulo 9

# PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS ATRAVÉS DE MÓDULOS

Freqüentemente diferentes módulos são interligados para compor sistemas de medição específicos. Transdutores de diferentes tipos e características metrológicas são interligados à unidades de tratamento de sinais que, por sua vez, são conectadas a sistemas de indicação ou registro. As incertezas de cada um dos módulos interligados se propagam de forma a compor a incerteza combinada do sistema de medição.

Este problema aparece de forma tão freqüente na experimentação que é aqui tratado em detalhes. É um caso particular da análise de incertezas também denominado de *propagação de erros*. Este capítulo apresenta considerações e procedimentos recomendados para estimar a incerteza combinada do sistema de medição a partir das características metrológicas dos módulos interligados.

A interligação de diversos módulos para compor um sistema de medição é esquematicamente representada na figura 9.1. O comportamento metrológico individual de cada uma dos módulos é conhecido a priori, em termos de sua incerteza padrão u(Mi) e sua correção C(Mi), para as condições de operação. Deseja-se avaliar o comportamento metrológico do sistema montado.

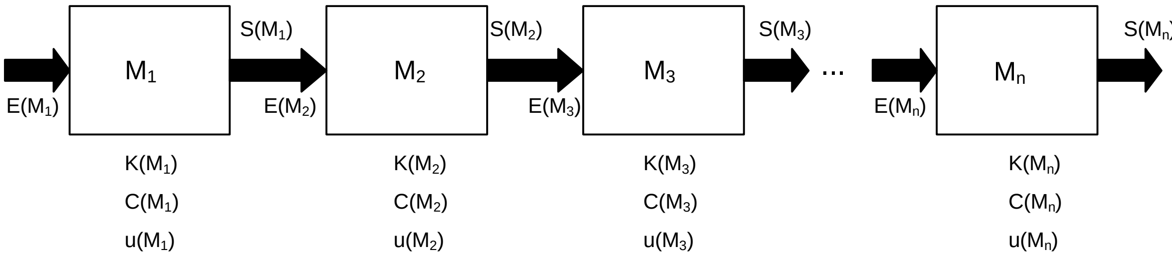



**Figura 9.1** - Propagação de incertezas entre módulos interligados de um Sistema de Medição

Seja $E(M_1)$ o sinal de entrada do módulo 1 e $S(M_1)$ o respectivo sinal de saída. Sejam ainda conhecidas a sensibilidade deste módulo, denominada por $K(M_1)$, a correção $C(M_1)$e a incerteza padrão $u(M_1)$ . O sinal de saída do primeiro módulo está correlacionado com a entrada pela equação (9.1)

Note que a dispersão equivalente a uma incerteza padrão do primeiro módulo está presente no sinal de saída.

$$S(M_1) = E(M_1).K(M_1) - C(M_1) \pm u(M_1) \tag{9.1}$$

$$S(M_2) = E(M_2).K(M_2) - C(M_2) \pm u(M_2)$$

Considerando que a saída do módulo 1 está interligada com a entrada do módulo 2, obtém-se:

que, quando combinada com (9.1), leva a:

$$S(M_2) = E(M_1).K(M_1).K(M_2) - [C(M_1).K(M_2) + C(M_2)] \pm [u(M_1).K(M_2) + u(M_2)]$$

Se esta análise for estendida para *n* módulos, é possível identificar três parcelas na saída do módulo *n*, o que coincide com a saída do sistema de medição:

a) O valor nominal da saída dado por:

$$S(SM) = E(M_1).K(M_1).K(M_2).K(M_3) \ldots K(M_n) \tag{9.2}$$

$$C(SM) = (\ldots(((C(M_1).K(M_2)+C(M_2)).K(M_3)+C(M_3)).K(M_4)+C(M_4))\ldots).K(M_n)$$

c) A influência da incerteza padrão de cada módulo na saída do SM:

$$u(SM) = \pm(\ldots(((u(M_1).K(M_2)+u(M_2)).K(M_3)+u(M_3)).K(M_4)+u(M_4))\ldots).K(M_n)$$

Após algumas manipulações algébricas, as equações (9.2) e seguintes podem ser reescritas em termos dos erros relativos, o que leva aos seguintes resultados:

$$C_r(SM) = C_r(M_1) + C_r(M_2) + C_r(M_3) + \ldots + C_r(M_n) \tag{9.3}$$

onde:
$C_r(SM)$= C(SM)/ S(SM) é a correção relativa do SM
$C_r(M_i)$= C($M_i$ )/S($M_i$) é a correção relativa do módulo *i*
e

$$u_r(SM) = \pm\sqrt{u_r^2(M_1) + u_r^2(M_2) + u_r^2(M_3) + \ldots + u_r^2(M_n)} \tag{9.4}$$

onde:
$u_r(SM)$ = u(SM) / S(SM) é a incerteza padrão relativa do SM
$u_r(M_i)$ = $u(M_i)$ / $S(M_i)$ é a relativa do módulo *i*

As equações (9.2), (9.3) e (9.4) permitem a caracterizar a saída do SM composto pela interligação dos *n* módulos como função das características metrológicas de cada módulo individualmente.

Uma vez determinada a incerteza relativa combinada do sistema de medição é necessário determinar a incerteza expandida. Para tal, deve ser utilizada a equação de Welch-Satterwaite para estimar o número de graus de liberdade efetivos envolvido e, a partir deste, determinar o respectivo fator de abrangência.

**Problema resolvido:**

A indicação do voltímetro abaixo é de 2,500 V. Determinar o resultado da medição do deslocamento, efetuado com o sistema de medição especificado abaixo, composto de:

a) Transdutor indutivo de deslocamentos:

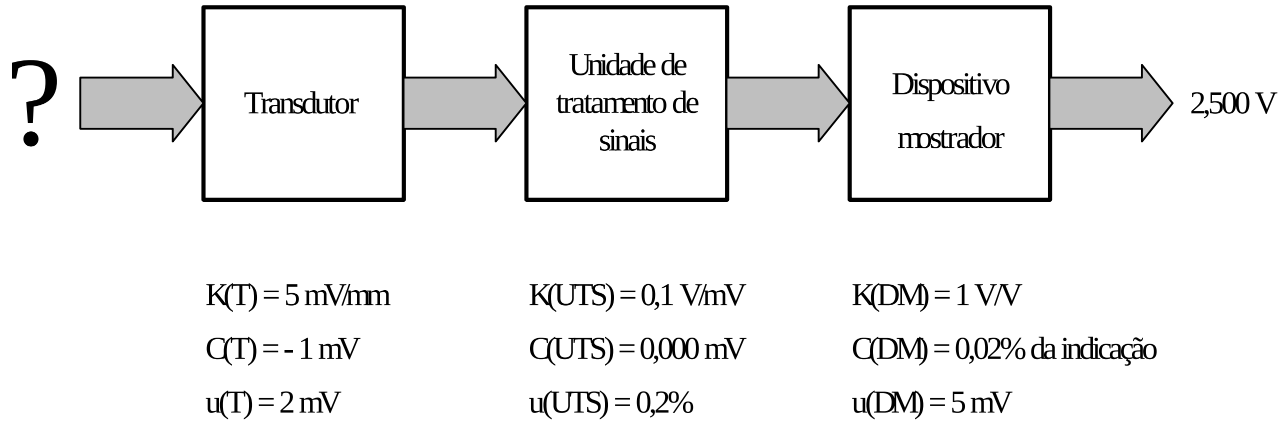
faixa de medição 0 a 20 mm
sensibilidade de 5 mV/mm
correção: -1 mV
incerteza padrão = 2 mV, estimada com $\nu$ = 16

b) Unidade de tratamento de sinais

faixa de medição: ± 200 mV na entrada
amplificação: 100 X
correção: 0,000 V
incerteza padrão = 0.2 %, estimada com $\nu$ = 20

c) Dispositivo mostrador: voltímetro digital

faixa de medição: ± 20 V
resolução: 5 mV
correção: + 0.02% do valor indicado
incerteza padrão = 5 mV, estimada com $\nu$ = 96




Para determinar o valor nominal do deslocamento é necessário aplicar a equação (9.2) sobre o valor indicado no voltímetro. Neste caso, S(SM) = 2,500 V e as constantes K, dadas pelas sensibilidades de cada módulo do SM, são:

Transdutor: K(T) = 5 mV/mm
UTS: K(UTS)= 0,1 mV/V
Mostrador K(DM)= 1 V/V
logo:
2,500 = E(T) . 5 . 0,1 . 1
donde:
E(T) = 5,000 mm

Para determinar os erro relativos, é necessário determinar o valor de saída de cada módulo:

S(T) = E(T) . K(T) = 5,000 mm . 5 mV/mm = 25,000 mV

S(UTS) = E(UTS) . K(UTS) = 25,000 mV . 0,1 mV/V = 2,500 V

S(DM)= E(DM) . K(DM) = 2,500 V . 1 V/V = 2,500 V

A correção expressa em termos relativos para cada módulos é calculada por:

$C_r$(T)= C(T)/S(T) = -1 mV/25,000 mV = -0,04

$C_r$(UTS) = C(UTS)/S(UTS) = 0,000 V/2,500 V = 0,000

C(DM)= 0,02% . 2,500 V = 0,5 mV

$C_r$(DM)= C(DM)/S(DM) = 0,5 mV/2500 mV = 0,0002

As incertezas padrão relativas são determinadas:

$u_r$(T)= u(T)/S(T) = 2 mV/25,000 mV = 0,08

u(UTS) = 0,2% . 20 V = 0,04 V

$u_r(UTS) = u(UTS)/S(UTS) = 0{,}04\ V/2{,}500\ V = 0{,}016$
$u_r(DM) = u(DM)/S_{(DM)} = 5\ mV/2500\ mV = 0{,}002$

A correção relativa combinada do SM é calculada pela equação (9.3):

$C_r(SM) = -0{,}04 + 0{,}000 + 0{,}0002 = -0{,}0398$

o que, na entrada do SM, resulta em:

C(E) = -0,0398 . 5,000 mm = -0,199 mm

A incerteza padrão relativa combinada do SM é:

$u_r(SM) = (0{,}08^2 + 0{,}016^2 + 0{,}002^2)^{1/2}$
$u_r(SM) = 0{,}01 \cdot (64 + 2{,}56 + 0{,}04)^{1/2}$
$u_r(SM) = 0{,}0815$

O que, na entrada do SM, resulta em:

u(E) = 0,0815 . 5,000 mm = 0,4075 mm

A incerteza expandida deve ser obtida pela multiplicação da incerteza padrão multiplicada pelo fator de abrangência para o número de graus de liberdade envolvidos, calculado por:

$$n_{ef} = \frac{(0{,}0815)^4}{\frac{(0{,}080)^4}{16} + \frac{(0{,}016)^4}{20} + \frac{(0{,}002)^4}{96}} = 16{,}4$$

Logo, $k_{95} = 2{,}17$ e:

U(E) = 2,17 . 0,4075 mm = 0,88 mm

Assim, finalmente, o resultado da medição do deslocamento é calculado por:

RM = I + C ± U
RM = (5,000 - 0,199 ± 0,88) mm
RM = (4,8 ± 0,9) mm

Tendo em vista que a parcela sistemática do erro de medição pode ser compensada através da correção, neste exemplo, fica claro que o módulo que mais afeta o erro aleatório do sistema global é o transdutor, que tem a maior incerteza padrão relativa. Para diminuir a incerteza de medição do resultado deve-se substituir este transdutor por outro de melhor qualidade. A incerteza expandida do SM não seria melhorada em nada se o voltímetro fosse substituído por outro melhor. Este tipo de análise é de grande valia para dimensionar e balancear um SM composto por diversos módulos.

# Anexo I

# O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

## I.1 Necessidade de Um Sistema Internacional

Essencial para a realização de uma medição é a existência da unidade, estabelecida por um padrão, segundo uma convenção própria, regional, nacional ou internacional.

No transcorrer do tempo, diversos foram os sistemas de unidades estabelecidas nas diferentes regiões do mundo. Em função do intercâmbio internacional de produtos e informações, bem como da própria incoerência entre unidades anteriormente adotadas, estabeleceu-se em 1960, através do "Bureau Internacional de Pesos e Medidas - BIPM" um conjunto coerente de unidades, o SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI), que consta das unidades de: base, derivadas e suplementares.

O BIPM tem por missão assegurar a unificação mundial das medidas físicas; ele é encarregado:

- de estabelecer os padrões fundamentais e as escalas das principais grandezas físicas, e de conservar os protótipos internacionais;
- de efetuar a comparação dos padrões nacionais e internacionais;
- de assegurar a coordenação das técnicas de medidas correspondentes;
- de efetuar e de coordenar as determinações relativas às constantes físicas que intervêm naquelas atividades.

A adoção das unidades do SI é no Brasil uma obrigatoriedade legal e traz uma série de pontos positivos:

a) facilidade de entendimento das informações a nível internacional (vantagem comercial e científica);
b) demonstração de maturidade técnico-científica através do abandono de sistemas superados.
c) a simplificação das equações que descrevem os fenômenos físicos, pelo fato de existir consistência entre as unidades das grandezas envolvidas;

## I.2 As Três Classes de Unidades do SI

No Sistema Internacional distinguem-se três classes de unidades:

- unidades de base;
- unidades derivadas;
- unidades suplementares.

### *I.2.1 - Unidades de Base*

No SI apenas sete grandezas físicas independentes são definidas, as chamadas *unidades de base*. Todas as demais unidades são derivadas destas sete. As definições destas grandezas são apresentadas na figura I.1. Embora o valor de cada grandeza seja sempre fixo não é raro que a forma de definir uma grandeza sofra alteração. Quando ocorrem, estas alterações são motivadas por algum avanço tecnológico que cria melhores condições de reprodução do valor unitário desta grandeza, isto é, praticidade e menores erros.

### *I.2.2 - Unidades Derivadas*

*Unidades derivadas* são as unidades que são formadas pela combinação das unidades de base segundo relações algébricas que correlacionam as correspondentes grandezas. Constituem a grande maioria das grandezas em uso. A figura I.2 exemplifica algumas destas grandezas. Por serem muito empregadas, algumas grandezas recebem denominação específica, como exemplo o newton, pascal, watt, hertz, etc (a grafia com iniciais em letras minúsculas é intencional e é para diferenciar dos respectivos nomes próprios Newton, Pascal, Watt, Hertz, etc).

### *I.2.3 - Unidades Suplementares*

No SI são também definidas as *unidades suplementares*. São unidades cuja definição é puramente matemática, sem que um padrão ou elemento físico seja necessário. Trata-se basicamente das unidades de ângulo plano e ângulo sólido, como mostra a figura I.3. O ângulo plano é a relação entre dois comprimentos e o Ângulo sólido é a relação entre uma área e o quadrado de um comprimento. São unidades sem dimensão. Nota-se que estas unidades também podem ser combinadas com as unidades base para formar novas unidades derivadas.

| GRANDEZAS | UNIDADE SI | |
|---|---|---|
| | NOME | GRANDEZA |
| ângulo plano | radiano | rad |
| ângulo sólido | esteradiano | sr |
| velocidade angular | radiano por segundo | rad/s |
| aceleração angular | radiano por segundo quadrado | $rad/s^2$ |
| intensidade energética | watt por esteradiano | W/sr |
| luminância energética | watt por metro quadrado esteradiano | $W.m^{-2}r^{-1}$ |

Figura I.3 - Unidades SI suplementares e suas derivadas

*observação:*

*É importante salientar que cada grandeza física tem uma só unidade SI, mesmo que esta unidade possa ser expressa sob diferentes formas, porém o inverso não é verdadeiro: a mesma unidade SI pode corresponder a várias grandezas diferentes.*

## I.3 Regras para Escrita e Emprego dos Símbolos das Unidades SI

Os princípios gerais referentes a grafia dos símbolos das unidades, são:

1) Os símbolos das unidades são expressos em caracteres romanos (verticais) e, em geral, minúsculos. Entretanto, se o nome da unidade deriva de um nome próprio, a primeira letra do símbolo é maiúscula (Ex: hertz $\rightarrow$ Hz).

| GRANDEZA FUNDAMENTAL | UNIDADE<br>DEFINIÇÃO | UNIDADE SÍMBOLO | ERRO ATUAL DE REPRODUÇÃO |
|---|---|---|---|
| comprimento | O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante o intervalo de tempo de 1/299792458 do segundo. | m | $4 \times 10^{-9}$ |
| massa | O quilograma é a unidade de massa: ele é igual à massa do protótipo internacional do quilograma. | kg | $10^{-9}$ |
| tempo | O segundo é a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do césio 133. | s | $10^{-10}$ |
| Intensidade de corrente elétrica | O ampère é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, mantida entre dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de seção circular desprezível, e situada à distância de 1 metro entre si, no vácuo, produz entre estes condutores uma força igual a $2 \times 10^{-7}$ newton por metro de comprimento. | A | |
| temperatura termodinâmica | O kelvin, unidade de temperatura termodinâmica, é a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto tríplice da água. | K | $1K \rightarrow 3 \times 10^{-3}$ |
| intensidade luminosa | A candela é a intensidade luminosa, numa dada direção de uma fonte que emite uma radiação monocromática de frequência $540 \times 10^{12}$ e cuja intensidade energética nessa direção é 1/683 watt por esterradiano. | cd | |
| quantidade de matéria | O mol é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quanto átomos existem em 0,012 quilogramas de carbono 12. | mol | |

**Figura I.1 – Unidades de Base do Sistema Internacional** AAG – 05/98 MCG 042

| GRANDEZAS | UNIDADE SI | | |
|---|---|---|---|
| | NOME | SÍMBOLO | EXPRESSÃO EM UNIDADE BASE |
| superfície | metro quadrado | $m^2$ | $m^2$ |
| volume | metro cúbico | $m^3$ | $m^3$ |
| velocidade | metro por segundo | m/s | $m.s^{-1}$ |
| aceleração | metro por segundo ao quadrado | $m/s^2$ | $m.s^{-2}$ |
| número de ondas | 1 por metro | $m^{-1}$ | $m^{-1}$ |
| masse específica | quilograma por metro cúbico | $kg/m^3$ | $kg.m^{-3}$ |
| concentração quant.matéria | mol por metro cúbico | $mol/m^3$ | $mol.m^{-3}$ |
| volume específico | metro cúbico por quilograma | $m^3/kg$ | $m^3.kg^{-1}$ |
| luminância | candela por metro quadrado | $cd/m^2$ | $cd.m^{-2}$ |
| freqüência | hertz | Hz | $s^{-1}$ |
| força | newton | N | $m.kg.s^{-2}$ |
| pressão | pascal | Pa | $m^{-1}.kg.s^{-2}$ |
| energia, trabalho, quant. calor | joule | J | $m^2.kg.s^{-2}$ |
| potência, fluxo energético | watt | W | $m^2.kg.s^{-3}$ |
| carga elétrica | coulomb | C | s.A |
| tensão elétrica | volt | V | $m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$ |
| capacitãncia elétrica | farad | F | $m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$ |
| resistência elétrica | ohm | Ω | $m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$ |
| condutância | siemens | S | $m^{-2}kg^{-1}.s^3.A^2$ |
| fluxo de indução magnética | weber | Wb | $m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$ |
| indução magnética | tesla | T | $kg.s^{-2}.A^{-1}$ |
| indutância | henry | H | $m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$ |
| fluxo luminoso | lumen | lm | cd.sr |
| iluminamento ou aclaramento | lux | lx | $m^{-2}.cd.sr$ |
| viscosidade dinâmica | pascal segundo | Pa.s | $m^{-1}.kg.s^{-1}$ |
| momento de uma força, torque | newton metro | N.m | $m^2.kg.s^{-2}$ |
| tensão superficial | newton por metro | N/m | $kg.s^{-2}$ |
| densidade de fluxo térmico | watt por metro quadrado | $W/m^2$ | $kg.s^{-3}$ |
| capacidade térmica, entropia | joule por kelvin | J/K | $m^{-2}.kg.s^{-2}.K^{-1}$ |
| calor espec., entropia espec. | joule por quilograma kelvin | J/(kg.K) | $m^2.s^{-2}.K^{-1}$ |
| energia específica | joule por quilograma | J/kg | $m^2.s^{-2}$ |
| condutividade térmica | watt por metro kelvin | W/(m.K) | $m.kg.s^{-3}.K^{-1}$ |
| densidade de energia | joule por metro cúbico | $J/m^3$ | $m^{-1}.kg.s^{-2}$ |
| campo elétrico | volt por metro | V/m | $m.kg.s^{-3}.A^{-1}$ |
| densidade de carga elétrica | coulomb por metro cúbico | $C/m^3$ | $m^{-3}.s.A$ |
| deslocamento elétrico | coulomb por metro quadrado | $C/m^2$ | $m^{-2}.s.A$ |
| permissividade | farad por metro | F/m | $m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2$ |
| densidade de corrente | ampère por metro quadrado | $A/m^2$ | $A.m^{-2}$ |
| campo magnético | ampère por metro | A/m | $A.m^{-1}$ |
| permeabilidade | henry por metro | H/m | $m.kg.s^{-2}.A^{-1}$ |
| energia molar | joule por mol | J/mol | $m^2.kg.s^{-2}.mol^{-1}$ |
| entropia molar, calor molar | joule por mol kelvin | J/(mol.K) | $m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1}$ |

AAG - 05/98 MCG 043

Figura I-2 - Unidades SI Derivadas

2) Os símbolos das unidades permanecem invariáveis no plural.

3) Os símbolos das unidades não são seguidos por ponto.

A Organização Internacional de Normalização (ISO) baixou recomendações adicionais para uniformizar as modalidades de emprego dos símbolos das unidades SI.

De acordo com essas recomendações:

a) O produto de duas ou mais unidades pode ser indicado, de uma das seguintes maneiras:

   Por exemplo: N.m, ou Nm

b) Quando uma unidade derivada é constituída pela divisão de uma unidade por outra, pode-se utilizar a barra inclinada (/), o traço horizontal, ou potências negativas.

   Por exemplo: $m/s$, $\frac{m}{s}$ ou $m.s^{-1}$

c) Nunca repetir na mesma linha mais de uma barra inclinada, a não ser com o emprego de parênteses, de modo a evitar quaisquer ambigüidades. Nos casos complexos devem utilizar-se parênteses ou potências negativas.

   Por exemplo: - $m/s^2$ ou $m.s^{-2}$, porém não $m/s/s$
   - $m.kg/(S^3.A)$ ou $m.kg.S\text{-}3.A^{-1}$, porém não $m.kg/s^3/A$

Observação: O *quilograma*

Entre as unidades de base do Sistema Internacional, a unidade de massa é a única cujo nome, por motivos históricos, contém um prefixo. Os nomes dos múltiplos e submúltiplos decimais da unidade de massa são formados pelo acréscimo dos prefixos à palavra "grama".

Por exemplo: $10^{-6}$ kg = 1 miligrama (1mg), porém nunca 1 microquilograma (1µkg).

## I.4 Múltiplos e Submúltiplos Decimais

No SI foram estabelecidos para as unidades os *múltiplos e submúltiplos decimais* com a nomenclatura e simbologia dada na figura I.4.

Apesar de serem previstos os múltiplos (da e h) bem como, os submúltiplos (d e c), o seu uso não é recomendado pelo SI. Desta forma, por exemplo, comprimentos, recomenda-se expressar em km, m, mm, µm, mas não em hm, dam, dm ou cm.

| FATOR | PREFIXO | SÍMBOLO | FATOR | PREFIXO | SÍMBOLO |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^{24}$ | yotta | Y | $10^{-1}$ | deci | d |
| $10^{21}$ | zetta | Z | $10^{-2}$ | centi | c |
| $10^{18}$ | exa | E | $10^{-3}$ | mili | m |
| $10^{15}$ | peta | P | $10^{-6}$ | micro | µ |
| $10^{12}$ | tera | T | $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{9}$ | giga | G | $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{6}$ | mega | M | $10^{-15}$ | femto | f |
| $10^{3}$ | quilo | k | $10^{-18}$ | atto | a |
| $10^{2}$ | hecto | h | $10^{-21}$ | zepto | z |
| $10^{1}$ | deca | da | $10^{-24}$ | yocto | y |

Figura I.4 - Múltiplos e Submúltiplos Decimais das Unidades do SI.

## I.5 Regras para Emprego dos Prefixos no SI

Os princípios gerais adotados pela ISO no emprego dos prefixos SI, são:

1) Os símbolos dos prefixos são impressos em caracteres romanos (verticais), sem espaçamento entre o símbolo do prefixo e o símbolo da unidade.

2) O conjunto formado pelo símbolo de um prefixo ligado ao símbolo de uma unidade constitui um novo símbolo inseparável (símbolo de um múltiplo ou submúltiplo dessa unidade) que pode ser elevado a uma potência positiva ou negativa e que pode ser combinado a outros símbolos de unidades para formar os símbolos de unidades compostas.

Por exemplo: $1cm^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}m^3$
$1cm^{-1} = (10^{-2}\ m)^{-1} = 10^2m^{-1}$
$1\mu s^{-1} = (10^{-6}\ s)^{-1} = 10^6s^{-1}$
$1V/cm = (1V)/(10^{-2}\ m) = 10^2V/m$

3) Os prefixos compostos, formados pela justaposição de vários prefixos SI, não são admitidos;
por exemplo: 1nm, porém nunca 1mµm

4) Um prefixo não deve ser empregado sozinho,
por exemplo: $10^6/m^3$, porém nunca $M/m^3$

## I.6 Alguns Enganos

São listados a seguir algumas situações errôneas muito comuns na prática que devem ser evitadas:

| ERRADO | CERTO |
|---|---|
| Km | km |
| Kg | kg |
| µ | µm |
| a grama | o grama |
| 2 hs | 2 h |

| | |
|---|---|
| peso de 10 quilos | massa de 10 kg (quilogramas) |
| 80 KM | 80 km/h |
| 250 °K (250 graus kelvin) | 250 K (250 kelvin) |

## I.7 Unidades não Pertencentes ao Sistema Internacional

### *I.7.1 Unidades em uso com o Sistema Internacional*

O BIPM reconheceu que os utilizadores do SI terão necessidade de empregar conjuntamente certas unidades que não fazem parte do Sistema Internacional, porém estão amplamente difundidas. Estas unidades desempenham papel tão importante que é necessário conservá-las para uso geral com o Sistema Internacional de Unidades. Elas são apresentadas na figura I.5.

A combinação de unidades deste quadro com unidades SI, para formar unidades compostas, não deve ser praticada senão em casos limitados, a fim de não perder as vantagens de coerência das unidades SI.

| NOME | SÍMBOLO | VALOR EM UNIDADES SI |
|---|---|---|
| minuto | min | 1 min = 60 s |
| hora | h | 1 h = 60 min = 3.600 s |
| dia | d | 1 d = 24 h = 86.400 s |
| grau | ° | 1° = ($\pi$/180) rad |
| minuto | ' | 1' = (1/60)° = ($\pi$/10.800) rad |
| segundo | " | 1" = (1/60)' = ($\pi$/648.000) rad |
| litro | l, L | $1l = 1dm^3 = 10^{-3}m^3$ |
| tonelada | t | $1\ t = 10^3$ kg |

Figura I.5 - Unidades em uso com o Sistema Internacional.

Do mesmo modo é necessário admitir algumas outras unidades não pertencentes ao Sistema Internacional, cujo uso é útil em domínios especializados da pesquisa científica, pois seu valor (a ser expresso em unidades SI) tem de ser obtido experimentalmente e, portanto não é exatamente conhecido (figura I.6).

### *I.7.2 - Unidades admitidas temporariamente*

Em virtude da força de hábitos existentes em certos países e em certos domínios, o BIPM julgou aceitável que as unidades contidas na figura I.7 continuassem a ser utilizadas, conjuntamente com as unidades SI, até que seu emprego não seja mais necessário.

Estas unidades não devem todavia ser introduzidas nos domínios onde elas não são mais utilizadas.

É altamente recomendável um estudo complementar do SI, para que se tome conhecimento de uma série de detalhes interessantes e importantes com respeito a esta normalização.

| NOME | SÍMBOLO | DEFINIÇÃO |
| --- | --- | --- |
| elétron-volt<br>unidade (unificada) de massa atômica | eV<br>u | (a)<br>(b) |

(a) 1 elétron-volt é a energia cinética adquirida por um elétron atravessando uma diferença de potencial de 1 volt no vácuo:
1 eV = 1,602 19 x $10^{-19}$ aproximadamente

(b) A unidade unificada de massa atômica é igual à fração 1/12 da massa de um átomo do nuclídio $C_{12}$.
1 u = 1,660 57 x $10^{-27}$ kg aproximadamente.

Figura I.6 - Unidades em uso com o Sistema Internacional, cujo valor em unidades SI é obtido experimentalmente.

| NOME | SÍMBOLO | VALOR EM UNIDADES SI |
| --- | --- | --- |
| milha marítima | | 1 milha marítima = 1852 m |
| nó | | 1 milha marítima por hora = (1852/3600)m/s |
| angstrom | Å | 1Å = 0,1nm = $10^{-10}$m |
| are | a | 1 a = 1 $dam^2$ = $10^2$ $m^2$ |
| hectare | ha | 1 ha = 1 $hm^2$ = $10^4 m^2$ |
| bar | bar | 1 bar = 0,1MPa = 100kPa = 1000hPa = $10^5$ Pa |

Figura I.7 - Unidades em uso temporariamente com o Sistema Internacional.

# Anexo II

# TERMINOLOGIA COMPLEMENTAR

A terminologia adotada neste trabalho é compatível com a regulamentada pela portaria número 029 de 10/03/95 do INMETRO, em vigor no Brasil, que assegura compatibilidade com normas internacionais da ISO (*International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology*).

Neste anexo são apresentadas algumas definições complementares, não contempladas por esta portaria, porém consideradas necessárias para expor de forma mais clara os conceitos e fenômenos aqui descritos.

**Erro Máximo de um Sistema de Medição** - $E_{máx}$

Faixa de valores simetricamente distribuída em relação ao zero que, com uma probabilidade estatisticamente definida, enquadra o erro máximo que pode ser cometido por um sistema de medição dentro de toda sua faixa de medição. Inclui as parcelas sistemática e aleatória. Normalmente adota-se 95 % de probabilidade de enquadramento. Este conceito pode ser estendido para os módulos que constituem o SM (erro máximo do indicador, erro máximo do transdutor, etc). O mesmo que *Incerteza do SM.*

**Histerese** - *H*

Histerese de um SM é um erro de medição que ocorre quando há diferença entre a indicação de um SM para um dado valor do mensurando quando este foi atingido por valores crescentes e a indicação quando atingida por valores decrescentes do mensurando.

**Incremento Digital** - *ID*

Variação mínima da indicação direta apresentada por um mostrador digital. Deve ser notado que nem sempre o último dígito varia de forma unitária.

**Repetitividade -** *Re*

É uma estimativa da faixa de valores dentro da qual, com uma probabilidade estatística definida, se situa o erro aleatório de um dado módulo ou sistema de medição. Quando não mencionado em contrário, entende-se que a probabilidade de enquadramento do intervalo de confiança é sempre 95 %. Sua estimativa é calculada pelo produto do desvio padrão experimental pelo respectivo coeficiente “t” de Student para indicações obtidas nas mesmas condições.

## ANEXO III

# CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA

Existem funções cujo comportamento é perfeitamente previsível. Estas funções são denominadas *determinísticas*. A função f(x) = 2x - 4 é uma função determinística uma vez que seu valor está perfeitamente caracterizado quando x é definido. Funções determinísticas são muito empregadas em modelos matemáticos idealizados.

O mundo real não é composto apenas por funções determinísticas. Certas propriedades, como por exemplo a resistência mecânica de um material, a vida de uma lâmpada, a soma de dois dados honestos jogados ao acaso ou a temperatura máxima em Curitiba no mês de janeiro, variam de amostra para amostra. Um valor médio é obtido, porém é impossível prever exatamente qual o valor a ser encontrado na própria amostra a ser testada.

Funções que apresentam imprevisibilidade são denominadas de *aleatórias*. Como são imprevisíveis, não podem ser equacionadas através dos recursos usuais da matemática determinística. Ferramentas estatísticas são necessárias para tal.

## III.1. Distribuição de Probabilidade

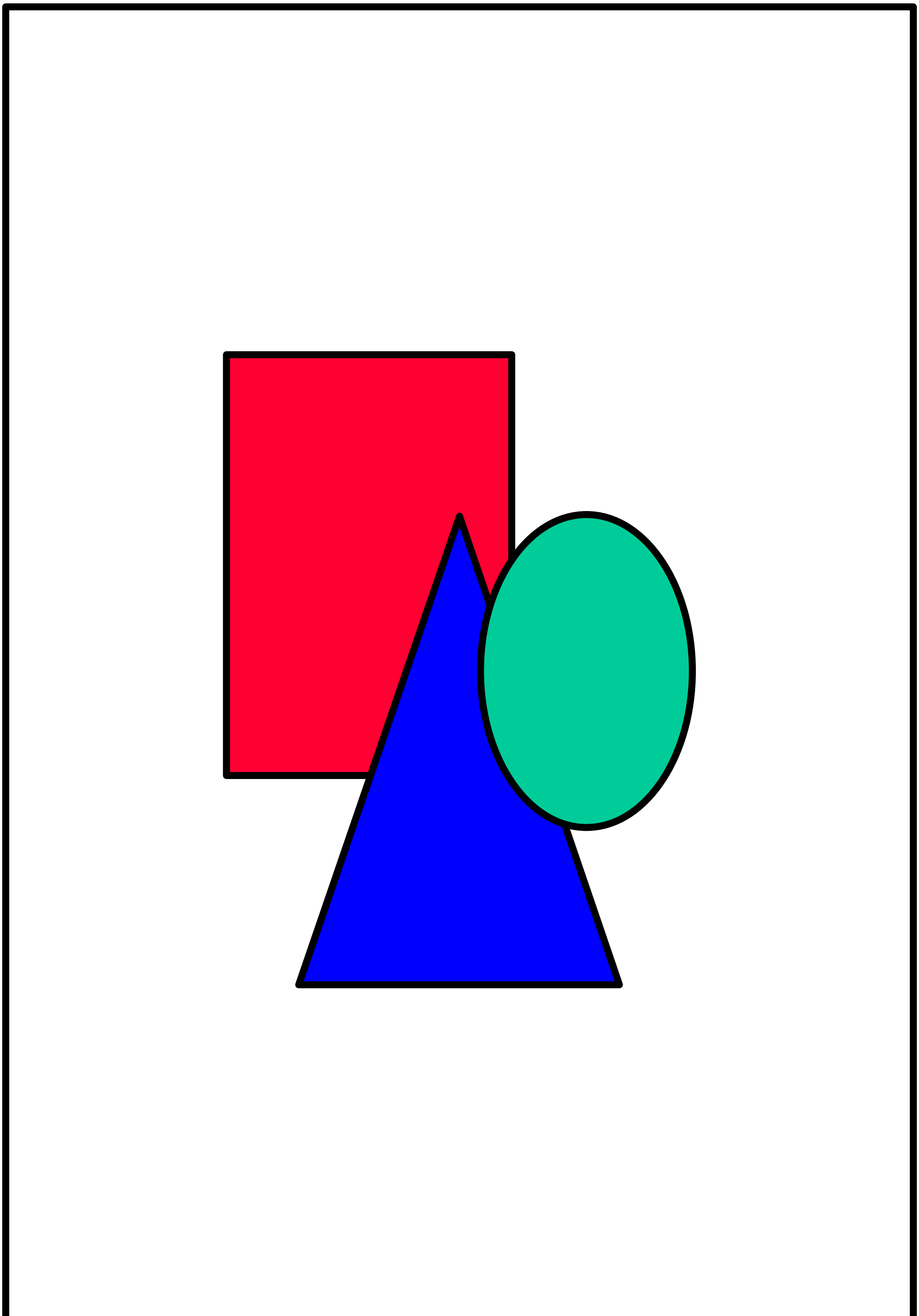
A soma de dois dados honestos pode resultar em qualquer número entre 2 e 12. Embora exista apenas uma única combinação de dados que resulte em 2 (1+1), nota-se que existem seis diferentes combinações de dados cuja soma resulta em 7 (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1). As chances de que a soma de dois dados lançados ao acaso resulte em 7 são maiores do que resultem em 2. Em outras palavras, a probabilidade de 7 ser obtido é maior do que 2.

A figura III.1 melhor caracteriza o universo das possíveis combinações dos dados que levam a cada soma. No eixo horizontal estão representados os valores possíveis para a soma, enquanto que no eixo vertical representa-se o número de combinações que resultam naquela soma, ou seja, a freqüência com que aquele evento se manifesta. No total são 36 combinações possíveis.

Para determinar a probabilidade de que uma determinada soma seja obtida, é suficiente dividir o número de combinações que resultam naquela soma pelo número de combinações totais possíveis. A probabilidade de que 7 seja obtido como soma é de 6/36 ou 1/6. As chances de obter 8 são de 5/36.

A probabilidade de que um valor situado dentro de uma faixa de valores seja obtido pode ser calculado pela soma das probabilidades individuais. Assim, as chances de que a soma esteja dentro da faixa 7 ± 1 é calculado por 5/36 + 6/36 + 5/36, que são as probabilidades de se obter 6, 7 e 8 respectivamente, o que resulta em 16/36 ou 4/9. Verifica-se que as chances de que qualquer valor entre 2 e 12 seja obtido são de 1 (100%).

O gráfico da figura III.1 pode ter a freqüência expressa em termos relativos. Para tal, divide-se a freqüência de cada evento pelo número total de eventos do universo possível. No caso, divide-se cada freqüência por 36. A figura III.2 mostra o gráfico resultante. Este gráfico das freqüências relativas recebe o nome de *função densidade de probabilidade*, representada por p(x), onde x



O representa cada evento envolvido e p(x) a probabilidade deste evento ocorrer.   No caso da soma de dois dados honestos, p(7) = 1/6, p(6 ≤ x ≤ 8) = 4/9,  p(-∞<x<+∞) = 1.

A soma de dois dados é uma variável discreta, isto é, pode assumir apenas alguns valores inteiros e bem definidos. Porém, freqüentemente, encontra-se na natureza funções aleatórias contínuas, isto é, podem assumir qualquer valor real. Ao se analisar estatisticamente o comportamento de uma máquina ensacadeira que, idealmente, deveria empacotar 1,00 kg do produto por saco, verifica-se, na prática, que isto não ocorre sempre. Por imperfeições no seu mecanismo, sacos com massas, por exemplo entre 0,98 kg e 1,02 kg podem resultar. Embora seja muito difícil calcular teoricamente a função densidade de probabilidade desta ensacadeira, é possível determina-la aproximadamente através de um grande número de observações experimentais.

O aspecto da função densidade de probabilidade de uma função aleatória contínua é uma curva contínua. A figura III.3.a ilustra p(x) para uma ensacadeira com distribuição de probabilidade normal ou gaussiana. Nota-se que p(x) é também uma função contínua. Neste caso, não há sentido em se determinar a probabilidade de que um determinado valor real venha a ocorrer, mas apenas de que faixas venham a ocorrer. Por exemplo, para determinar as chances de que sacos 1,00 ± 0,02 kg sejam obtidos determina-se a área abaixo da curva p(x), representada por P(0,98 ≤ x ≤ 1,02)[iv], entre estes limites, isto é:

$$P(0{,}98 \le x \le 1{,}02) = \int_{x=0{,}98}^{x=1{,}02} p(x)\,dx \qquad \text{(III.1)}$$

Deve-se notar uma importante propriedade de p(x): P(-∞ < x < +∞) = 1, isto é, a integral de p(x) entre os limites -∞ e +∞, que corresponde à probabilidade de x estar dentro destes limites, sempre resulta em 1.

A figura III.b apresenta a função densidade de probabilidade de outra ensacadeira com características diferentes. Nota-se que, embora a área total sob $p_b(x)$ seja também unitária, esta é uma curva mais fechada que $p_a(x)$. A máquina que possui $p_b(x)$ apresenta maior probabilidade de resultar sacos com valores mais próximos do ideal que a primeira, portanto é uma máquina melhor. Já a máquina que possui $p_c(x)$ é a pior de todas por apresentar probabilidade relativamente altas de que valores que se afastam bastante do ideal venham a ocorrer. A característica que diferencia estas três ensacadeiras é a chamada *dispersão* que é maior quanto maior for o "espalhamento" da curva p(x), isto é, a dispersão de $p_c(x)$ é maior que a dispersão de $p_b(x)$.

O desvio padrão (σ) é um parâmetro estatístico empregado para medir a dispersão de uma função aleatória. É tanto maior quanto maior for a dispersão. No caso da figura III.3 é evidente  que $\sigma_c > \sigma_a > \sigma_b$. σ é calculado por:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2}{n}} \qquad \text{(III.2)}$$

onde:
$x_i$ é o valor do evento "i"
μ é o valor médio de todos os eventos

Outro parâmetro importante que caracteriza uma função aleatória é o seu valor central, isto é, seu valor médio (μ). μ é calculado por:

$$m = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \qquad \text{(III.3)}$$

---

[iv] Aqui o símbolo p(x) é empregado para a função densidade de probabilidade enquanto P(y) representa a probabilidade do evento y ocorrer.

## III.2 Distribuição Normal

Uma das distribuições estatísticas mais comumente encontradas na prática é a distribuição *normal* ou *gaussiana*. O *teorema do limite* central demonstra que a combinação de um grande número de fatores de natureza aleatória, com qualquer distribuição, aproxima-se da distribuição normal à medida que aumenta o número dos fatores envolvidos. A forma da função densidade de probabilidade p(x) da distribuição normal assemelha-se a de um sino, como mostrada na figura III.4. Apresenta simetria em torno do valor central (médio). O desvio padrão desta distribuição corresponde à distância entre o valor central e o ponto de inflexão de p(x), isto é, o ponto onde a segunda derivada de p(x) é zero. Sua função densidade de probabilidade é:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-z^2/2}$$

onde: (III.4)

$$z = \frac{x - m}{s}$$

e
$\mu$ é o valor médio
$\sigma$ é o desvio padrão

A distribuição das dimensões de um lote de peças fabricadas por uma máquina, a distribuição em um alvo de tiros dados por um atirador, os erros de medição e a temperatura média do dia 21 de abril de cada ano são exemplos de distribuições normais.

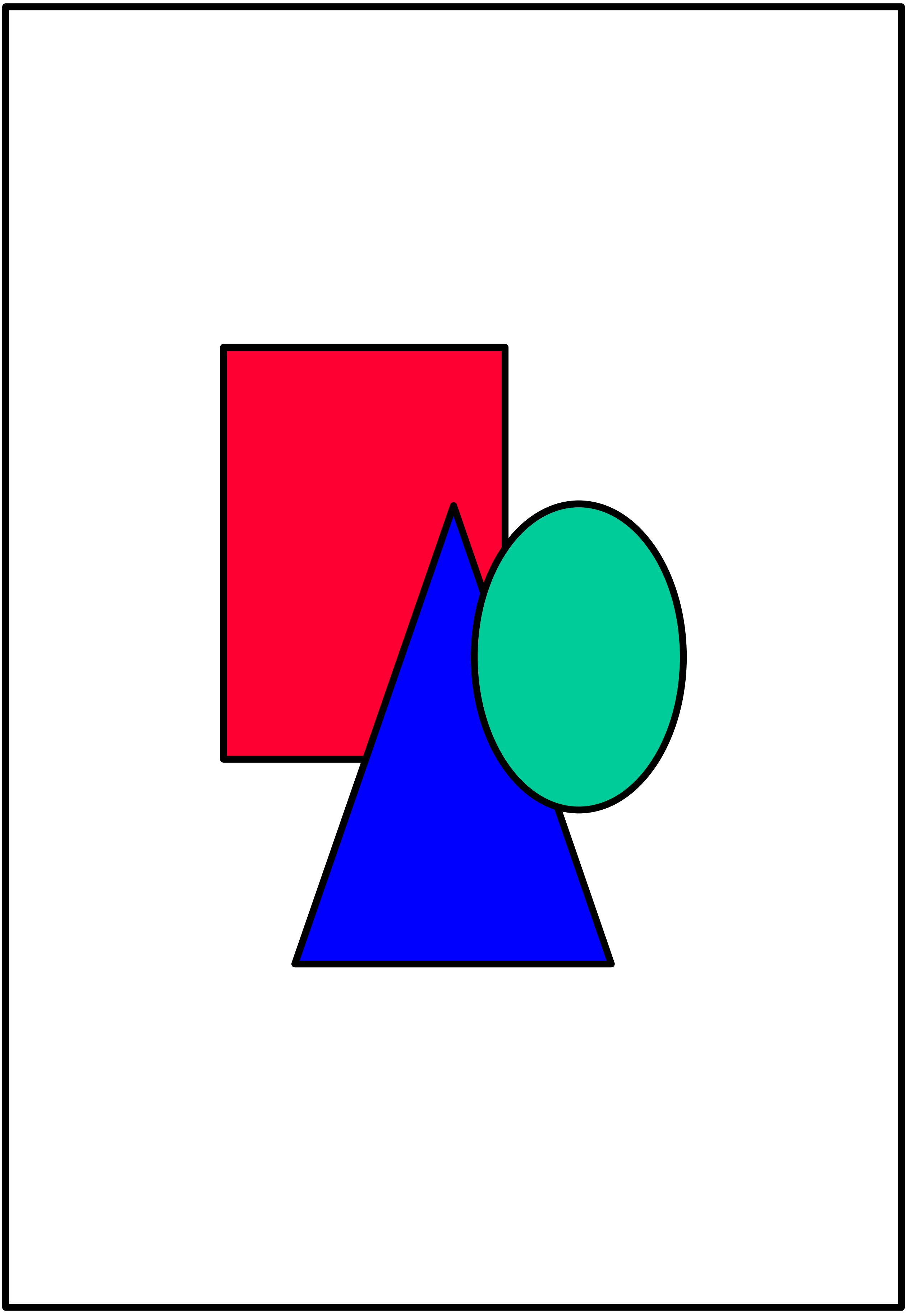
O cálculo da probabilidade de que uma dada função aleatória com distribuição normal esteja dentro de uma faixa de valores é também calculada pela equação (III.1), isto é, pela integral definida de p(x) entre os limites considerados. No caso da distribuição normal não se pode exprimir a integral de p(x) como uma função simples. É comum encontrar esta integral na forma de tabelas normalizadas. Entretanto, existem alguns valores particulares que, por serem muito empregados na prática, devem ser citados.

Se tratando de uma função aleatória com distribuição normal, valor médio $\mu$ e desvio padrão $\sigma$, é possível calcular as seguintes probabilidades:

$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = 0.6826$
$P(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma) = 0.9973$
$P(\mu-1.96\sigma < x < \mu+1.96\sigma) = 0.95$
$P(\mu-2.58\sigma < x < \mu+2.58\sigma) = 0.99$
$P(\mu-3.30\sigma < x < \mu+3.30\sigma) = 0.999$

## III.3 A Natureza Aleatória do Erro de Medição

Sabe-se que é impossível efetuar uma medição absolutamente isenta de erros. Seja em função do sistema de medição ou em função do mensurando ou do operador, o erro de medição está sempre presente. Ao se repetir a medição de um mensurando invariável, com o mesmo sistema de



medição e nas mesmas condições, como por exemplo a medição repetitiva da massa de uma peça com a mesma balança, verifica-se, com freqüência, que o valor obtido não se repete.

O erro de medição presente em cada indicação pode ser determinado pela diferença entre a indicação e o valor verdadeiro convencional, isto é, E = I - VVC. Em um SM ideal, este erro deveria ser sempre nulo. Porém, nota-se que este erro é na verdade uma função aleatória com distribuição aproximadamente normal.

O valor médio do erro de medição é o *erro sistemático* (Es), que só poderia ser determinado baseada em um número infinito de observações, por:

$$
\begin{aligned}
&Es = MI - VVC \\
&onde: \\
&MI = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i
\end{aligned}
\qquad \text{(III.5)}
$$

e
MI é a média de infinitas indicações
VVC é o valor verdadeiro convencional

Se um número finito de observações é envolvido, a equação (III.5) pode ainda ser usada para estimar o erro sistemático. Neste caso, esta estimativa recebe o nome específico de *tendência (Td)*.

A parcela aleatória do erro de medição é simplesmente chamada de *erro aleatório*. Tratando-se de uma função aleatória, cada valor medido possui um erro aleatório diferente, e dado por: $Ea_i = I_i - MI$. A sua caracterização é realizada através da medida da dispersão da distribuição normal associada, isto é, do desvio padrão (σ).

Define-se a *repetitividade (Re)*, como sendo a faixa que, com uma probabilidade estatística definida, conterá o erro aleatório. É comum adotar a probabilidade de 95% como aceitável para a Re ([v]). Assim, 95% dos erros aleatórios estarão dentro desta faixa. A Re é estimada por:

$$\mathrm{Re}(95\%) = \pm 1{,}96\,\mathrm{s} \qquad \text{(III.6)}$$

Porém, como será visto no próximo item, a estimação de σ não é tão direta.

## III.4 Amostra Versus População

Os conceitos de média (μ) e desvio padrão (σ) são válidos para uma função aleatória. Para caracterizá-los perfeitamente pelas equações III.2 e III.3 é necessário envolver um número infinito de valores observados desta função, isto é, toda a *população*.

Na prática, não se tem tempo para coletar um número infinito de valores. É comum considerar apenas uma *amostra* de *n* valores desta população. A média e o desvio padrão da população são *estimados* a partir da média, do desvio padrão e do tamanho da amostra. A média e o desvio padrão da amostra são calculados por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(III.7)}$$

e

---

[v] Alguns autores adotam 99,7%, o que corresponde a ± 3σσσ

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \text{(III.8)}$$

Esta estimativa só é confiável para valores grandes de n. Se amostras pequenas são envolvidas (n <200), é necessário aplicar um coeficiente de correção (t) conhecido como *coeficiente t-Student*. O coeficiente t-Student é função da probabilidade de enquadramento desejada (P) e do tamanho da amostra (n). A figura III.5 apresenta valores tabelados para "t" como função de *n* e de *P*. Assim, a repetitividade associada ao erro aleatório pode ser estimada por:

$$Re = \pm\, t.\, s \qquad \text{(III.9)}$$

A média verdadeira da população (μ), calculada a partir dos parâmetros da amostra, não pode ser determinada exatamente. Alguma incerteza ainda resultará. Pode-se mostrar que a média da população estará situada dentro da seguinte faixa, determinada de *intervalo de confiança da média*:

$$\bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s = \bar{x} \pm \frac{\mathrm{Re}}{\sqrt{n}} \qquad \text{(III.9)}$$

onde:

$\bar{x}$ é a média da amostra
s é o desvio padrão da amostra
t é o coeficiente t-Student
n é o tamanho da amostra

## III.5 Outras Distribuições Estatísticas

Existem situações na prática onde é conveniente modelar certos efeitos ou fenômenos por meio de outras distribuições distintas da normal. Neste texto, não será discutida a aplicabilidade das diversas distribuições em problemas de metrologia.

a) Distribuição retangular

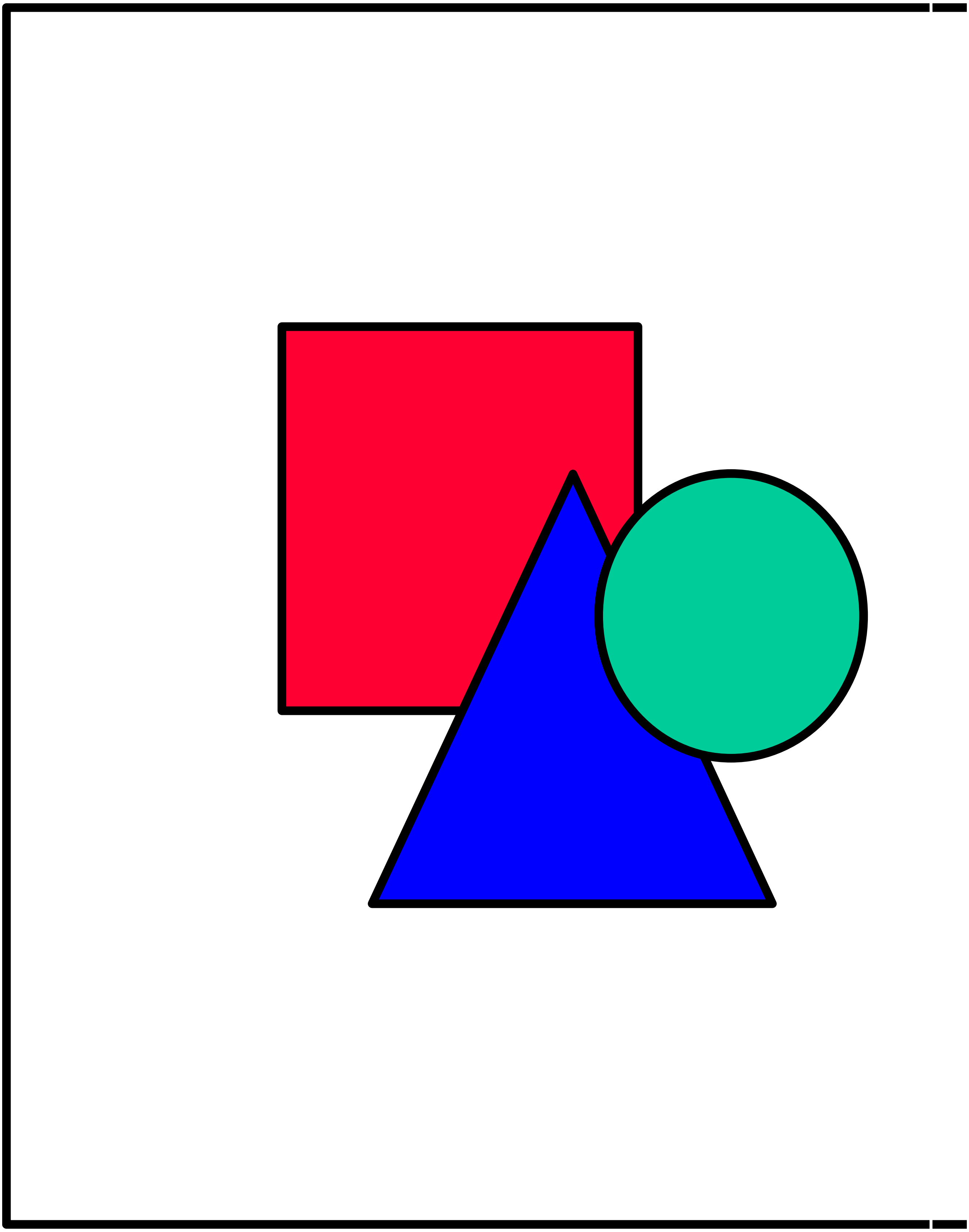
É caracterizada por apresentar a mesma densidade de probabilidade para todos os valores dentro dos limites dados por "m- *a"* e "m+ *a"*, e zero fora destes (figura III.6). Seu desvio padrão é dado por:

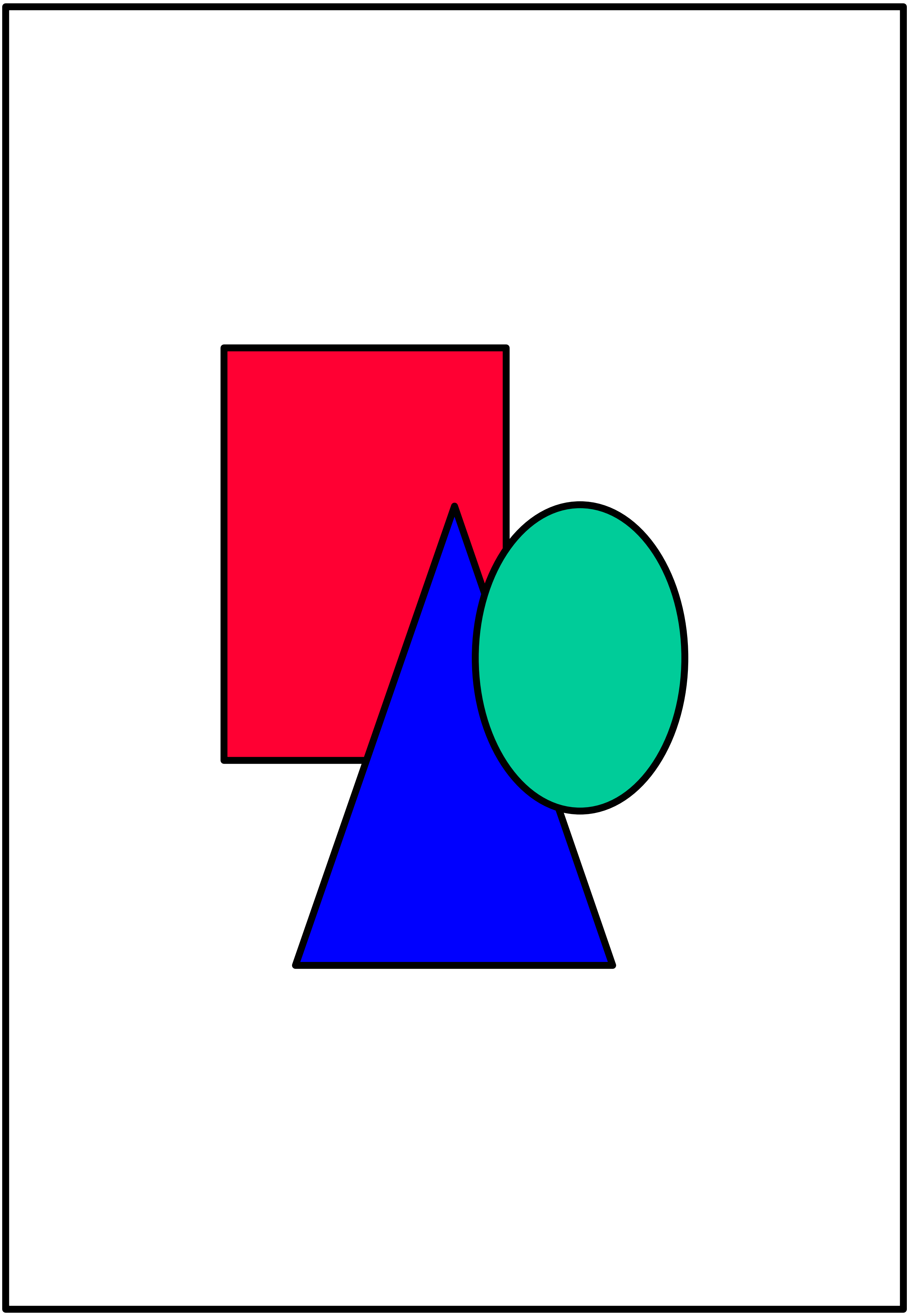
$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

b) Distribuição triangular

É caracterizada por apresentar máxima probabilidade para o valor médio e decrescer linearmente até zero nos limites dados por "m- *a"* e "m+ *a"*, e zero fora destes (figura III.7). Seu desvio padrão é dado por:

$$s = \frac{a}{\sqrt{6}}$$





Figuras:

III.1 - Combinações possíveis para a soma de dois dados honestos.
III.2 - Função densidade de probabilidade para a soma de dois dados honestos.
III.3 - Distribuição normal ou Gaussiana
III.4 - Funções densidade de probabilidade para três máquinas ensacadeiras.

a) máquina normal, b) máquina com pequena dispersão e c) máquina com grande dispersão

III.5 - fig 2.10
III.6 - Distribuição de probabilidade retangular
III.7 - Distribuição de probabilidade triangular

**Exercícios para o Anexo III**

A3.1. Classifique as variáveis abaixo como determinísticas ou aleatórias:

A distância indicada no odômetro de automóveis que percorrem o trecho Florianópolis-Curitiba pela mesma estrada

O horário do pôr-do-sol de uma mesma cidade ao longo do ano

A massa de “uma pitada de sal” que uma cozinheira acrescenta todo dia no feijão

A vida de uma lâmpada de 60W de um mesmo lote de fabricação

O seno do terço do quadrado de um número

A3.2. Qual a probabilidade da soma de três dados honestos estar entre 5 e 7 inclusive?

A3.3. Classifique as seguintes variáveis aleatórias como discretas ou conínuas:

A massa de uma “pitada de sal”

A medida da massa de uma “pitadas de sal” obtida de uma balança com resolução de 0,1g

A vida de lâmpadas de um mesmo lote de fabricação

O tempo expresso em horas correspondente à vida de uma pessoa do sexo masculino residente em uma dada cidade

As várias medidas efetuadas da massa de uma mesma peça, efetuadas pela mesma balança

A3.4. Senso p(x) a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua, determine expressões para o cálculo da probabilidade desta variável:

Ser maior que o valor $x_z$

Ser menor que o valor $x_b$

Sendo $x_a > x_b$, estar entre estes dois valores

Sendo $x_a > x_b$, ser maior que xa ou menor que x

A3.4. Qual a probabilidade de uma variável aleatória com distribuição normal com média 18,00g e desvio padrão 0,12g situar-se dentro da faixa 18,00 $\pm$ 0,36g? e na faixa

18,24 $\pm$ 0,12g?

A3.5. Calcule a média amostral, o desvio padrão amostral e o intervalo de confiança do erro aleatório dos dados abaixo. Calcule também o intervalo de confiança dentro do qual estará a média verrdadeira população completa (equação III.9)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12,8 | 12,5 | 13,0 | 13,1 |
| 12,6 | 12,9 | 13,1 | 12,8 |
| 12,3 | 12,8 | 12,6 | 12,7 |

A3.6. Supondo que os dados da questão anterior referem-se à calibração de juma balança onde a mesma massa padrão de 12,500 $\pm$ 0,002g foi medida diversas vezes, o que possível afirmar sobre o erro sistemático e sua incerteza?

# ANEXO IV

## REGRAS DE COMPATIBILIZAÇÃO DE VALORES

O resultado de uma medição, envolvendo o resultado base (RB) e a incerteza do resultado (IR), deve sempre ser apresentado de forma compatível. É importante que o número e a posição dos dígitos que representam estes componentes do RM guardem uma certa relação.

Seja, por exemplo, o RM representado da forma abaixo:

RM = (255,227943 ± 4,133333333) mm

A forma acima é de difícil legibilidade por conter uma série de dígitos que absolutamente não trazem nenhuma informação relevante.

Sabe-se que a IR (incerteza do resultado) é um número obtido em função de certos procedimentos estatísticos, portanto é uma estimativa aproximada. Não há necessidade de apresentar o tamanho da faixa de incerteza com precisão melhor que um ou dois *algarismos significativos*[vi]. No caso, a representação ± 4,1, ou mesmo ± 4, é suficiente para a IR. O resultado base deve ser escrito de forma a conter o mesmo número de casas decimais que a IR.

As seguintes regras são recomendadas como forma de automaticamente estabelecer as considerações acima:

## IV.1 Regras de Arredondamento de Valores

Quando deseja-se arredondar um número para que seja expresso com uma certa quantidade de dígitos significativos, deve-se aplicar as regras convencionais de arredondamento:

**Regra 1:**

*Se o algarismo a direita do último dígito que se pretende representar for inferior a 5, apenas desprezam-se os demais digitos à direita.*

Exemplo:
3.1415926535 → 3.14

**Regra 2:**

*Se o algarismo a direita do último dígito que se pretende representar for maior que 5, adiciona-se uma unidade ao último dígito representado e desprezam-se os demais digitos à direita.*

Exemplo:
3.1415926535 → 3.1416

**Regra 3:**

*Se o algarismo a direita do último dígito que se pretende representar for igual a 5:*
*a)adiciona-se uma unidade ao último dígito representado e desprezam-se os demais digitos à direita se este dígito for originalmente ímpar;*
*b)apenas são desprezados os demais digitos à direita se este dígito for originalmente par ou zero.*

---

[vi] Não confundir com casas decimais.

Exemplos:

| | | |
|---|---|---|
| 3.1415926535 | → | 3.142 |
| 12.625 | → | 12.62 |

## IV.2 Regras de Compatibilização de Valores

O RM deve ser expresso preferencialmente com apenas um algarismo significativo na IR. Neste caso as regras de compatibilização 1 e 2 devem ser usadas:

**Regra 1:**

*Arredondar a IR para apenas um algarismo significativo, isto é, com apenas um algarismo diferente de zero.*

**Regra 2:**

*Arredondar o RB para mante-lo compatível com a IR de forma que ambos tenham o mesmo número de dígitos decimais após a vírgula.*

Exemplos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 58.33333 | ± 0.1 | → | 58.3 | ± 0.1 |
| 385.42333 | ± 0.21253 | → | 385.4 | ± 0.2 |
| 37.8359 | ± 1 | → | 38 | ± 1 |
| 95.94 | ±0.0378 | → | 9594. | ± 0.04 |
| 93 | ± 0.002 | → | 93.000 | ± 0.002[vii] |

A IR pode ser representada com dois dígitos significativos, quando se tratar do resultado de uma medição crítica, executada com todo o cuidado e envolvendo um grande número de medições e/ou quando a IR for relativamente grande quando comprada ao RB. Nestes casos, aplica-se a regra 3 em substituição à 1, em conjunto com a regra 2:

**Regra 3:**

*Escrever a IR com dois algarismos significativos, isto é, com apenas dois algarismos diferentes de zero.*

Exemplos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3.1385 | ± 0.15 | → | 3.14 | ± 0.15 |
| 385.46333 | ± 0.24374 | → | 385.46 | ± 0.24 |
| 319.213 | ± 11 | → | 319 | ± 11 |
| 6.325 | ± 0.414 | → | 6.32 | ± 0.41 |
| 0.03425 | ± 0.0034 | → | 0.0342 | ± 0.0034 |

## IV.3 Observações Complementares

[vii] Esta representação é correta se for assumido que a leitura original era de 93.000, cujos zeros não foram escritos. Se a leitura tivesse sido simplesmente truncada, independentemente dos dígitos abandonados, a representação deveria ser 93.0 ± 0.5.

a) Não se deve esquecer de apresentar a unidade do RM, observando a grafia correta do símbolo que representa a unidade, inclusive respeitando as letras maiúsculas e minúsculas, conforme o caso. A unidade deverá pertencer ao Sistema Internacional de Unidades (SI). Caso seja necessária a utilização de outra unidade não pertencente ao SI, deve-se, entre parênteses, apresentar o correspondente RM em unidades do SI. Isto mostra que não houve falta de conhecimentos na apresentação do resultado.

b) É recomendável o uso de parêntesis envolvendo o RB e a IR para deixar claro que ambas parcelas estão referenciadas à mesma unidade. Exemplo:

(120,6 ± 0,9) m deve ser preferido em lugar de 120,6 ± 0,9 m.

c) Embora na apresentação do RM sejam utilizados apenas os dígitos mínimos necessários, deve ser dito que é conveniente manter um número razoável de dígitos significativos nos cálculos intermediários e efetuar o arredondamento apenas no final. Deve se adotar, nestes cálculos, ao menos um ou dois dígitos significativos a mais que o resultante para o RB.

d) Em qualquer situação, o bom senso deve sempre prevalecer.