

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Medidas de Dispersão ou de Variabilidade

Estatística para a Qualidade

Prof. Eveline Pereira

Introdução:

Se considerarmos os conjuntos:

a) 70, 70, 70, 70, 70 = média: $350/5 = 70$

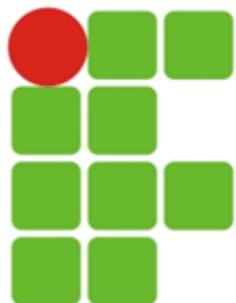
b) 68, 69, 70, 71, 72 = média: $350/5 = 70$

c) 5, 15, 50, 120, 160 = média: $350/5 = 70$

Veremos que suas médias são iguais, no entanto a **dispersão ou variabilidade** dos dados deve ser considerada.

Enquanto a) tem variabilidade nula, c) apresenta grande variação.

Para qualificar valores, ressaltando a menor ou maior variabilidade fazemos uso das medidas estatísticas de **amplitude total, variância e desvio padrão**.



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Amplitude Total



Amplitude Total para dados não agrupados

Amplitude total: é a diferença entre o maior e o menor valor observado

$$AT = X \text{ máx.} - X \text{ mín.}$$

Ex.:

Para a distribuição 40, 45, 48, 52, 54, 62 e 70, $AT = 70 - 40$ logo,

$$AT = 30$$

A amplitude nos dá ideia de concentração, **quanto maior a amplitude, maior a dispersão dos dados.**



Amplitude Total para dados agrupados sem intervalo de classe

Vale a mesma regra:

$$AT = X \text{ máx.} - X \text{ mín.}$$

Ex.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	2	6	12	7	3

$$AT = 4 - 0 = 4$$



Amplitude Total para dados agrupados com intervalo de classe

Nesse caso AT é a diferença entre o limite máximo da série e o limite mínimo:

$$AT = L \text{ máx.} - l \text{ mín.}$$

Ex.: Estaturas dos alunos da escola A

$$AT = 174 - 150 = 24 \text{ cm}$$

i	Estaturas (cm)	fi	Fi
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	

Amplitude Total

A amplitude total tem como inconveniente **considerar apenas os extremos**, descuidando dos valores intermediários o que em muitas vezes invalida a idoneidade do resultado.

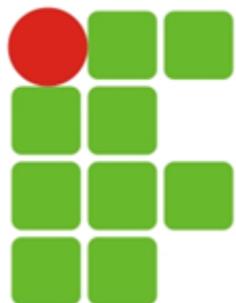
Ex.:

{5, 10, 15, 20} AT = 15, média = 12,5

{5, 20, 20, 20} AT = 15, média = 16,25

{5, 5, 5, 20} AT = 15, média = 8,75

Utiliza-se amplitude total para estudar alterações da temperatura no dia, mês ou ano, no controle de qualidade e quando **a compreensão popular é mais importante que a exatidão e a estabilidade**



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE



Variância e Desvio Padrão

Variância e Desvio Padrão

Variância e Desvio Padrão: são medidas que **não se deixam levar pelos extremos** da distribuição, **são bastante estáveis** e muito utilizadas

A **variância (s^2)** baseia-se nos desvios em torno da média aritmética, porém determinando a média aritmética do quadrado dos desvios.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Sendo a variância calculada a partir dos quadrados dos desvios, a **variância é um número em unidade quadrada**, o que é um inconveniente sob o ponto de vista prático, assim, o **desvio padrão é a raiz quadrada da variância**

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ou} \quad s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

Propriedades do Desvio Padrão

1ª- Somando ou subtraindo uma constante de todos os valores de uma variável **o desvio padrão não se altera;**

2ª- Multiplicando-se todos os valores de uma variável por uma constante diferente de zero, **o desvio padrão fica multiplicado por essa constante**

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para x_i e uma para x_i^2

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

Exemplo: Calcular o desvio padrão do conjunto: { 40, 45, 48, 52, 54, 62, 70 }

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para x_i e uma para x_i^2

n	x_i	x_i^2
1	40	1600
2	45	2025
3	48	2304
4	52	2704
5	54	2916
6	62	3844
7	70	4900
soma:	371	20293

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

Exemplo: Calcular o desvio padrão do conjunto: { 40, 45, 48, 52, 54, 62, 70 }

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para xi e uma para xi²

n	xi	xi ²
1	40	1600
2	45	2025
3	48	2304
4	52	2704
5	54	2916
6	62	3844
7	70	4900
soma:	371	20293

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum xi^2}{n} - \left(\frac{\sum xi}{n}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{20293}{7} - \left(\frac{371}{7}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{20293}{7} - (53)^2}$$

$$s = \sqrt{2899 - 2809}$$

$$s = \sqrt{90}$$

$$s = 9,486$$

Resolva:

1. Calcular o desvio padrão do conjunto: { 8, 10, 11, 15, 16, 18}

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para x_i e uma para x_i^2

n	x_i	x_i^2
soma:		

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$



Resolva:

1. Calcular o desvio padrão do conjunto: { 8, 10, 11, 15, 16, 18 }

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para x_i e uma para x_i^2

n	x_i	x_i^2
1	8	64
2	10	100
3	11	121
4	15	225
5	16	256
6	18	324
soma:	78	1090

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1090}{6} - \left(\frac{78}{6}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{181,66 - (13)^2}$$

$$s = \sqrt{181,66 - 169}$$

$$s = \sqrt{12,66}$$

$$s = 3,56$$

Desvio Padrão para dados agrupados SEM intervalo de classe

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para $x_i \cdot f_i$ e uma para $f_i \cdot x_i^2$

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$

Exemplo: Calcular s para a distribuição:

x_i	f_i
0	2
1	6
2	12
3	7
4	3
soma	30

Desvio Padrão para dados agrupados sem intervalo de classe

Passo 1: Organizar uma tabela com uma coluna para $x_i \cdot f_i$ e uma para $f_i \cdot x_i^2$

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	2	0	0
1	6	6	6
2	12	24	48
3	7	21	63
4	3	12	48
soma	30	63	165

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{165}{30} - \left(\frac{63}{30}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{5,5 - (2,1)^2}$$

$$s = \sqrt{5,5 - 4,41}$$

$$s = \sqrt{1,09}$$

$$s = 1,044$$

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$

Resolva:

Passo 1: Calcule o desvio padrão para:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	2	5	8	6	3	1

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$



Passo 1: Calcule o desvio padrão para:

xi	fi	xi.fi	fi.xi²
1	2	2	2
2	5	10	20
3	8	24	72
4	6	24	96
5	3	15	75
6	1	6	36
soma	25	81	301

Resolva:

xi	1	2	3	4	5	6
fi	2	5	8	6	3	1

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{301}{25} - \left(\frac{81}{25}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{12,04 - (3,24)^2}$$

$$s = \sqrt{12,04 - 10,4976}$$

$$s = \sqrt{1,5424}$$

$$s = 1,24$$

Desvio Padrão para dados agrupados COM intervalo de classe

Passo 1: Considerar o ponto médio da classe e a frequência

Passo 2: Organizar uma tabela com uma coluna para **xi**, **xi.fi** e uma para **fi.xi²**

Passo 3: Aplicar a fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum fxi^2}{n} - \left(\frac{\sum xifi}{n}\right)^2}$$

Exemplo: Calcular **s** para a distribuição:

i	Estaturas (cm)	fi
1	150 - 154	4
2	154 - 158	9
3	158 - 162	11
4	162 - 166	8
5	166 - 170	5
6	170 - 174	3
	soma:	40

Desvio Padrão para dados agrupados com intervalo de classe

Passo 1: Considerar o ponto médio da classe e a frequência

Passo 2: Organizar uma tabela com uma coluna para x_i , $x_i \cdot f_i$ e uma para $f_i \cdot x_i^2$

i	Estaturas (cm)	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	150 - 154	4	152	608	92416
2	154 - 158	9	156	1404	219024
3	158 - 162	11	160	1760	281600
4	162 - 166	8	164	1312	215168
5	166 - 170	5	168	840	141120
6	170 - 174	3	172	516	88752
	soma:	40	972	6440	1038080

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1038080}{40} - \left(\frac{6440}{40}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{25952 - (161)^2}$$

$$s = \sqrt{25952 - 25921}$$

$$s = \sqrt{31}$$

$$s = 5,57 \text{ cm}$$

Passo 3: Aplicar a fórmula:

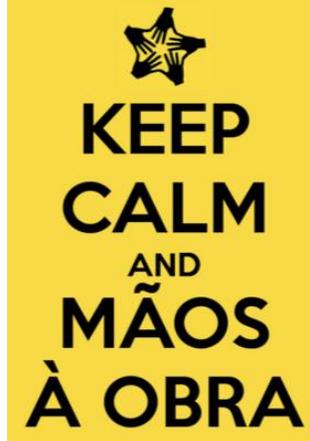
$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$

Resolva:

Passo 1: Calcule o desvio padrão para a distribuição:

Aluguel (\$)	Nº de casas
1,5 - 3,5	12
3,5 - 5,5	18
5,5 - 7,5	20
7,5 - 9,5	10
9,5 - 11,5	5
soma:	65

$$s = \sqrt{\frac{\sum f i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$$



Resolva:

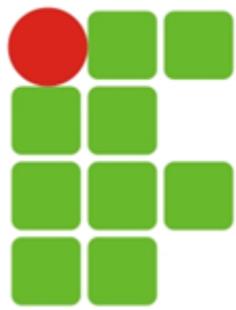


Passo 1: Calcule o desvio padrão para:

Aluguel (\$)	Nº de casas	xi	xi . fi	fi.xi ²
1,5 - 3,5	12	2,5	30	75
3,5 - 5,5	18	4,5	81	364,5
5,5 - 7,5	20	6,5	130	845
7,5 - 9,5	10	8,5	85	722,5
9,5 - 11,5	5	10,5	52,5	551,25
soma:	65		378,5	2558,25

$$s = \sqrt{\frac{\sum fixi^2}{n} - \left(\frac{\sum xifi}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{2558,25}{65} - \left(\frac{378,5}{65}\right)^2} =$$

$$\sqrt{39,357 - (5,823)^2} = \sqrt{39,357 - 33,908} = \sqrt{5,448} = 2,334$$



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Coeficiente de Variação



Coeficiente de Variação CV

O desvio padrão por si só não nos diz muita coisa...

Um desvio de duas unidades pode ser considerado pequeno quando o valor médio é 200, já se a média for 20, não podemos dizer o mesmo.

Quando queremos **comparar duas séries de valores em relação a sua dispersão** utilizamos o **coeficiente de variação**.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

Coeficiente de Variação CV

Exemplo: Qual variável teve maior dispersão?

	\bar{x}	s
Estaturas	175	5
Pesos	68	2

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

$$CV_{estatura} = \frac{5}{175} \times 100 = 0,0285 \times 100 = 2,85\%$$

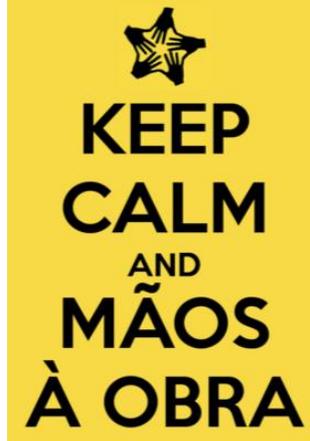
$$CV_{peso} = \frac{2}{68} \times 100 = 0,0294 \times 100 = 2,94\%$$

Nesse exemplo, os pesos variaram mais do que as estaturas.

Resolva:

Um inspetor de controle da qualidade em uma empresa engarrafadora de leite que engarrafa embalagens de leite pequenas e grandes obtém uma amostra de cada produto e observa que o volume médio das embalagens pequenas é 1 xícara com desvio padrão de 0,08 xícaras, e o volume médio das embalagens grandes é 1 galão (16 xícaras), com desvio padrão de 0,4 xícaras. Qual embalagem possui maior variação?

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$



Resolva:



Um inspetor de controle da qualidade em uma empresa engarrafadora de leite que engarrafa embalagens de leite pequenas e grandes obtém uma amostra de cada produto e observa que o volume médio das embalagens pequenas é 1 xícara com desvio padrão de 0,08 xícaras, e o volume médio das embalagens grandes é 1 galão (16 xícaras), com desvio padrão de 0,4 xícaras. Qual embalagem possui maior variação?

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

	Desvio padrão	Média
Emb. Pequena	0,08	1
Emb. Grande	0,4	16

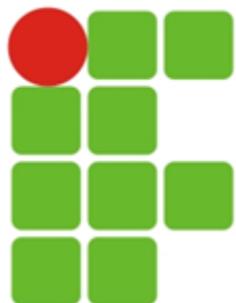
$$\text{Emb. P} = 0,08/1 = 0,08$$

$$\text{Emb. G} = 0,4/16 = 0,025$$

R.: Embalagem pequena

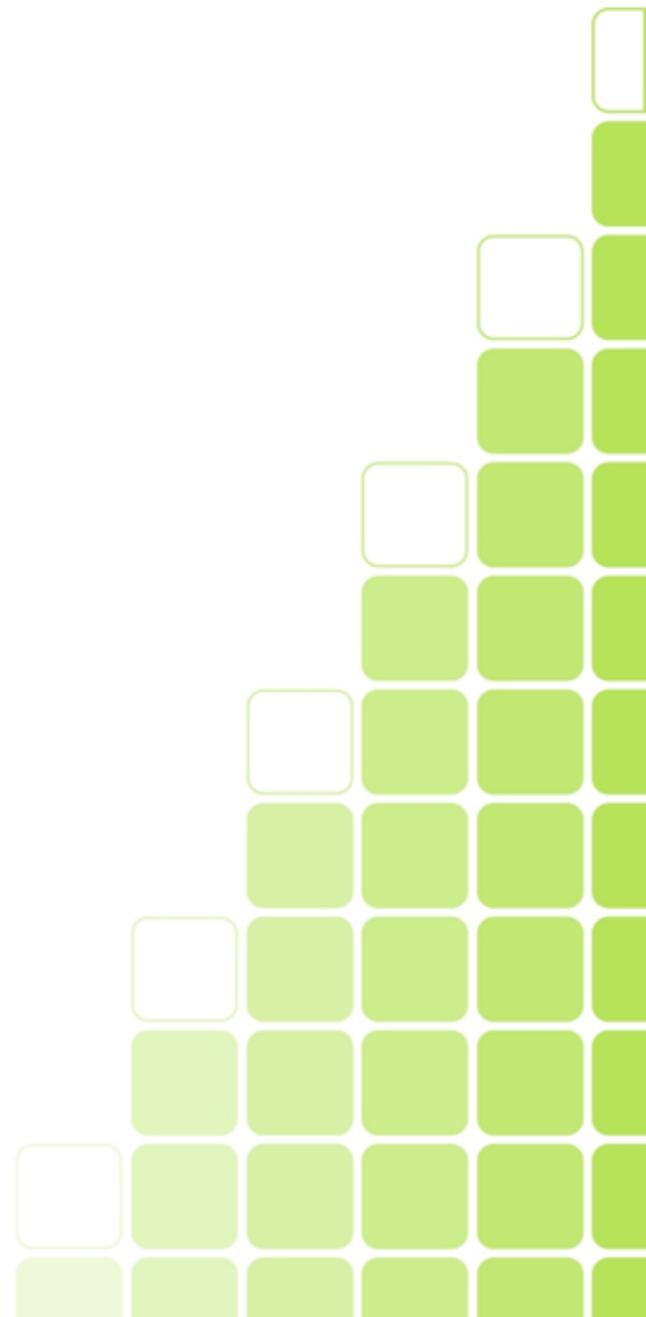
Dúvidas:





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Exercícios



Exercícios:



1. Calcule a amplitude total, o desvio padrão, a variância e o coeficiente de variação

a) $\{-10, -6, 2, 3, 7, 9, 10\}$

b)

xi	2	3	4	5	6	7	8
fi	1	3	5	8	5	4	2

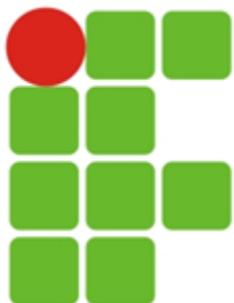
c)

Classes	1,5 -	1,6 -	1,7 -	1,8 -	1,9 -	2,0 -	2,1 -	2,2
fi	4	8	12	15	12	8	4	

2. Sabendo que um conjunto de dados apresenta para média aritmética e desvio padrão, 18,3 e 1,47, calcule o coeficiente de variação

3. Em um exame final de matemática o grau médio de 150 alunos foi 7,8 e o desvio padrão 0,8. Em estatística, o grau médio foi 7,3 e o desvio 0,76. Onde houve maior dispersão?

4. Uma distribuição apresenta as seguintes estatísticas: $CV=2,9\%$ e $s=1,5$. Qual a média da distribuição?



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Separatrizes

Estatística para a Qualidade
Prof. Eveline Pereira

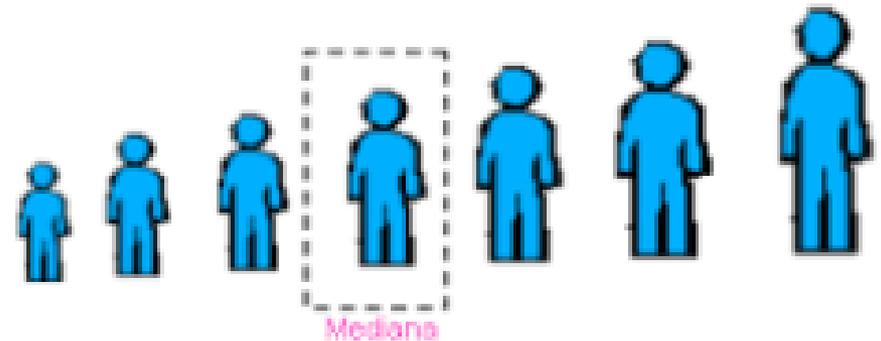
Introdução:

- Como vimos a mediana caracteriza uma série de valores devido à sua **posição central**, há ainda outra característica importante, ela **divide uma série em duas partes iguais** que apresentam o mesmo número de valores.

4,4,5,7,7



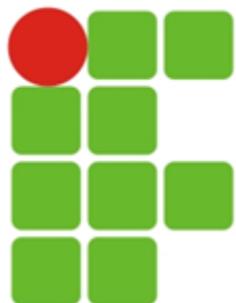
Mediana



Introdução:

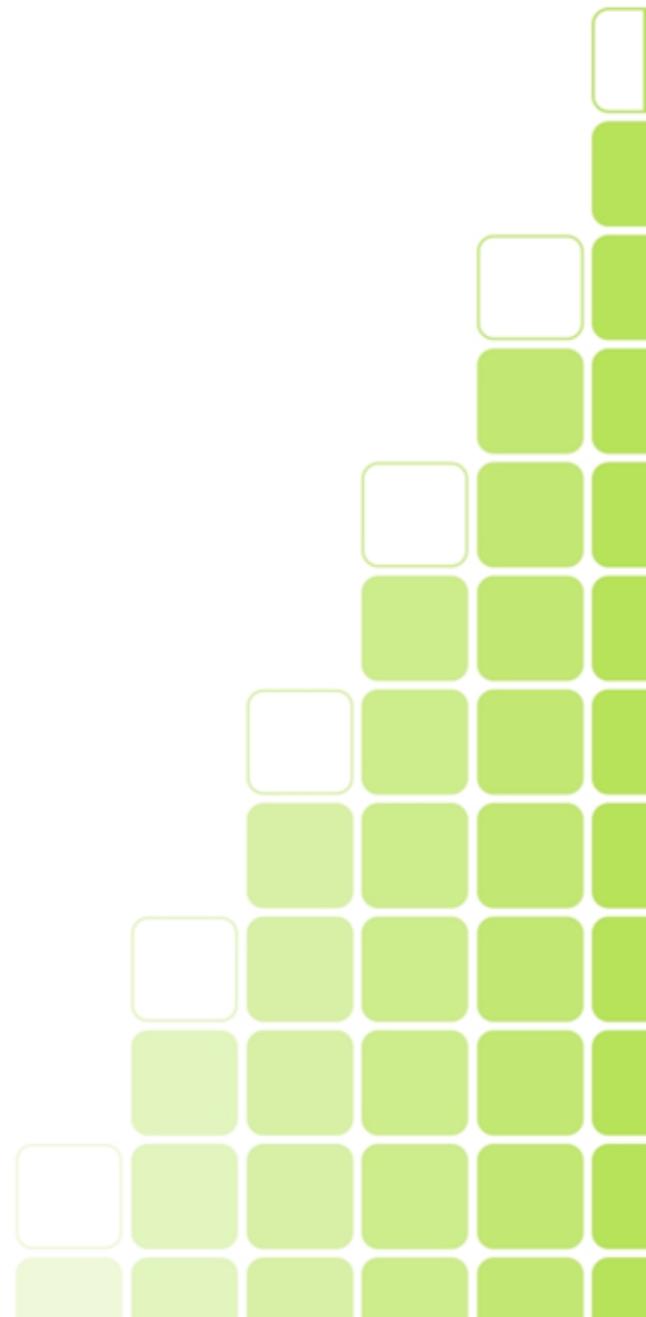
- Além das medidas de posição, há outras que não são medidas de tendência central mas estão ligadas a mediana já que se baseiam em sua posição na série.
- Essas medidas – **os quartis, os percentis e decis** – são **juntamente com a mediana, conhecidas como separatrizes.**





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

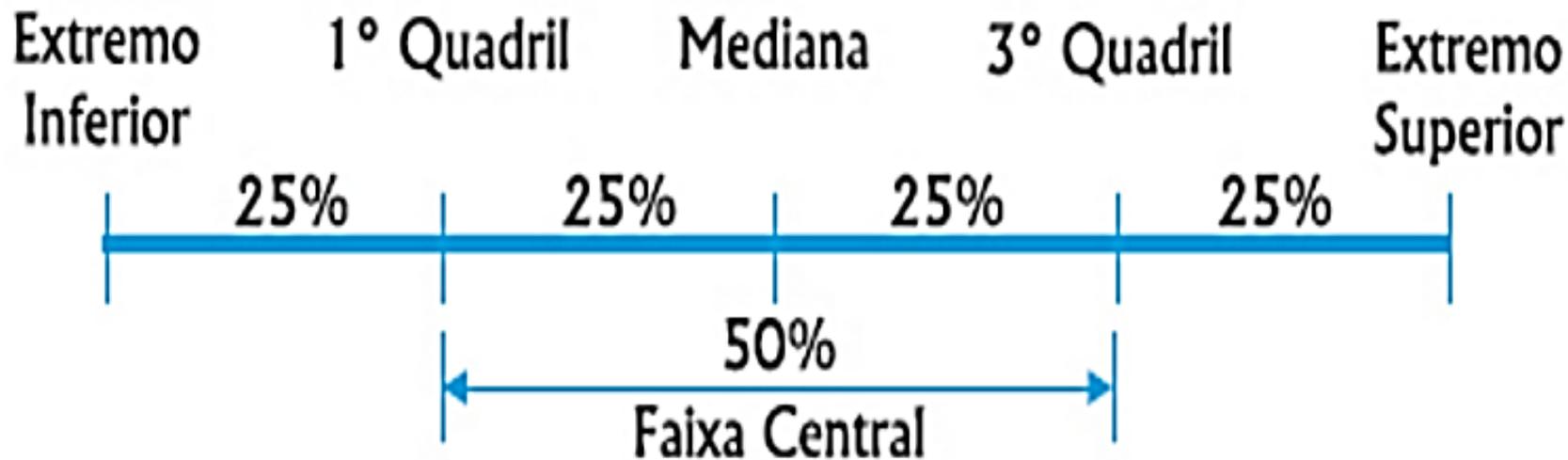
Quartis



Os Quartis:

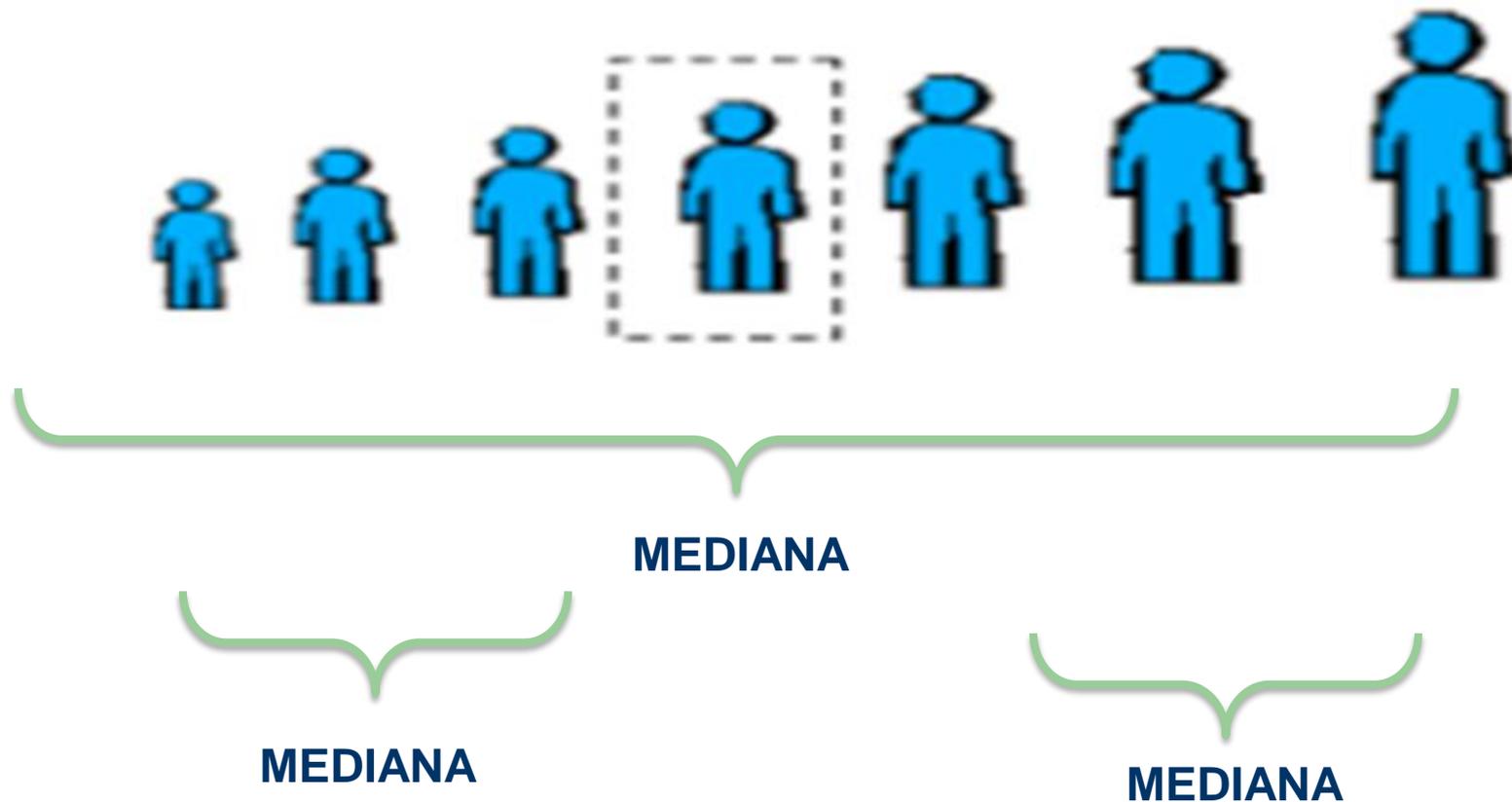
- Denominamos **quartis** os valores de uma série que a dividem em **quatro partes iguais**.
- Há portanto 3 quartis:
 - **O primeiro quartil (Q1)**= valor situado na série de modo que $\frac{1}{4}$ dos dados está abaixo dele e $\frac{3}{4}$ estão acima dele
 - **O segundo quartil (Q2)**= evidentemente coincide com a mediana, logo, $Q2 = Md$
 - **O terceiro quartil (Q3)**= valor situado na série de modo que $\frac{3}{4}$ dos dados está abaixo dele e $\frac{1}{4}$ estão acima dele

Os Quartis:



1. Quartis para dados não agrupados

- Utilizar o princípio do cálculo da mediana para os 3 quartis:
 - serão calculadas " 3 medianas " em uma mesma série.



1. Quartis para dados não agrupados

- **Exemplo1 (Série ímpar):**
- Calcule os quartis da série: { 5, 2, 6, 9, 10, 13, 15 }
- **Passo 1:** Ordenar dos valores: { 2, 5, 6, 9, 10, 13, 15 }
- **Passo 2:** Calcular a mediana:
 - O valor que divide a série acima em duas partes iguais é igual a **9**, logo:
 - **Md = 9 que será = Q2**, portanto, **Q2 = 9**
 - Temos agora {2, 5, 6 } e {10, 13, 15 } como sendo os dois grupos de valores iguais proporcionados pela mediana (Q2).
- **Passo 3:** Calcular as medianas das partes provenientes da verdadeira Mediana
 - Em { 2, 5, 6 } a mediana é = 5 . Ou seja: **Q1 = 5**
 - Em {10, 13, 15 } a mediana é =13 . Ou seja: **Q3 = 13**

1. Quartis para dados não agrupados

- **Exemplo 2 (Série par):**
- Calcule os quartis da série: {1, 13, 2, 10, 6, 3, 5, 7, 1, 9, 5, 9}
- **Passo 1:** Ordenar dos valores: { 1, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 10, 13 }
- **Passo 2:** Calcular a mediana:
 - $Q2 = Md = (5 + 6) / 2 = 5,5$ logo: **Q2 = 5,5**
- **Passo 3:** Calcular as medianas das partes provenientes da verdadeira Mediana
 - Em {1, 1, 2, 3, 5, 5 } a mediana é $(2 + 3)/2 = 2,5$. Ou seja: **Q1 = 2,5**
 - Em {6, 7, 9, 9, 10, 13 }, $Md = Q3 = (9 + 9) / 2 = 9$ logo: **Q3 = 9**

Resolva

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade:

$$\{3, 9, 2, 8, 4, 6, 5, 9, 10, 4, 3, 5, 6, 11\}$$

Qual a idade que corresponde a 25% das crianças (Q_1)?

Exercícios:

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade: $\{3,9,2,8,4,6,5,9,10,4,3,5,6,11\}$

a) Qual a idade que corresponde a 25% das crianças (Q_1)?

Passo 1: Organizar os dados: $\{2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 9, 9, 10, 11\}$

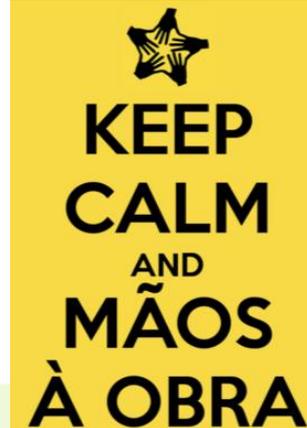
Passo 2: Calcular a mediana: $(5+6)/2 = 5,5$ logo: $Md = Q_2 = 5,5$

Passo 3: Calcular mediana dos dados a esquerda da verdadeira mediana:

$\{2, 3, 3, 4, 4, 5, 5\} = 4$ logo: $Q_1 = 4$

Resposta: c

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	3	4	4	5	5	6	6	8	9	9	10	11



2. Quartis em dados agrupados SEM intervalos de classe

Passo 1: Calcula-se a posição do quartil.

$$P_{QK} = \frac{K \sum f_i}{4} \quad (\text{onde } K = 1, 2 \text{ ou } 3)$$

Passo 2: É necessário inserir a coluna da frequência acumulada, e nela procurar o valor da posição do quartil.

Passo 3: O Valor do quartil será o valor da variável **que corresponde** àquela classe.

2. Quartis em dados agrupados sem intervalos de classe

Exemplo: Calcular os valores do Q_1 , Q_2 e Q_3 da tabela seguinte:

Nº de acidentes / mês no Cruzamento X em CG/07

Nº de acidentes / mês	f	F
0	4	4
1	6	10
2	9	19
3	5	24
4	4	28
$\sum f = 28$		

$$P_{QK} = \frac{K \sum f_i}{4} \quad (\text{onde } K = 1, 2 \text{ ou } 3)$$

a) Vamos calcular inicialmente Q_1

Passo 1: Determinar a posição do Q_1 (25%)

$$P_{Q1} = \frac{1 \cdot 28}{4} = 7 \Rightarrow \text{posição do } 1^\circ \text{ quartil}$$

Passo 2: Procurar na coluna da F a posição do 7º elemento

Passo 3: A variável que corresponde à posição do 7º elemento é 1 (na segunda classe).

25% da pesquisa mostrou que este cruzamento teve 1 acidente / mês.

2. Quartis em dados agrupados sem intervalos de classe

b) Vamos calcular o Q_2

Passo 1: Determinar a posição do 2º quartil (50%)

$$P_{Q_2} = \frac{2 \cdot 28}{4} = 14 \Rightarrow \text{posição do 2º quartil}$$

Passo 2: Procurar na coluna da F a posição do 14º elemento

Passo 3: A variável que corresponde à posição do 14º elemento é 2 (na terceira classe).

50% da pesquisa mostrou que este cruzamento teve 2 acidentes / mês.

c) Vamos calcular o Q_3

1Passo: Determinar a posição do 3º quartil (50%)

$$P_{Q_3} = \frac{3 \cdot 28}{4} = 21 \Rightarrow \text{posição do 3º quartil}$$

Passo 2: Procurar na coluna da F a posição do 21º elemento

Passo 3: A variável que corresponde à posição do 21º elemento é 3 (na quarta classe).

75% da pesquisa mostrou que este cruzamento teve 3 acidentes / mês.

Nº de acidentes / mês	f	F
0	4	4
1	6	10
2	9	19
3	5	24
4	4	28
		$\sum f = 28$

Resolva

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

Valores (R\$)	Nº de crianças	F
10	2	2
15	6	8
20	8	16
25	15	31
30	13	44
35	11	55
40	5	60
	$\sum f_i = 60$	

Qual o valor economizado por 75% das crianças (Q_3)?

$$P_{QK} = \frac{K \sum f_i}{4}$$

Exercícios:

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

a) Qual o valor economizado por 75% das crianças (Q_3)?

$$P_{QK} = \frac{K \sum f_i}{4}$$

Passo 1: Calcular F

Passo 2: Calcular posição do Q3: $PQ3 = (3 \times 60) / 4 = 45$

Passo 3: Localizar F 45 na tabela: está linha 6

Valores (R\$)	Nº de crianças	F
10	2	2
15	6	8
20	8	16
25	15	31
30	13	44
35	11	55
40	5	60
	$\sum f_i = 60$	

Passo 4: verificar o elemento correspondente: R\$35, logo $Q_3 = R\$35$

3. Quartis em dados agrupados COM intervalos de classe

Para determinação dos quartis **em dados agrupados** utilizamos a fórmula da mediana substituindo $\frac{\sum fi}{2}$ por $\frac{k \sum fi}{4}$, onde "k" é a ordem do quartil, assim:

$$Q1 = l^* + \frac{\left[\frac{\sum fi}{4} - F(\text{ant})\right] h^*}{f^*}$$

$$Q3 = l^* + \frac{\left[\frac{3\sum fi}{4} - F(\text{ant})\right] h^*}{f^*}$$

3. Quartis para dados agrupados com intervalos de classe

$Q2 = Md$, logo:

$$Q2 = Md = l^* + \frac{\left[\frac{\sum f_i}{2} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*}$$

3. Quartis em dados agrupados com intervalos de classe

Exemplo: Determinar Q1 e Q3 para a distribuição abaixo:

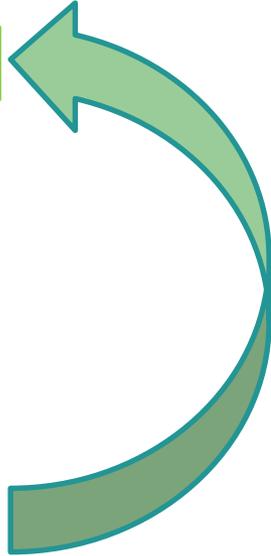
i	Estaturas (cm)	f_i
1	150 - 154	4
2	154 - 158	9
3	158 - 162	11
4	162 - 166	8
5	166 - 170	5
6	170 - 174	3
		$\Sigma = 40$

$$Q1 = l^* + \frac{\frac{k \sum f_i}{4} - F(\text{ant})}{f^*} h^*$$

$$Q3 = l^* + \frac{\frac{3 \sum f_i}{4} - F(\text{ant})}{f^*} h^*$$

Exemplo: Cálculo de Q1:

i	Estaturas (cm)	f_i	F_i
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	



Passo 1: Identificar a classe Q1

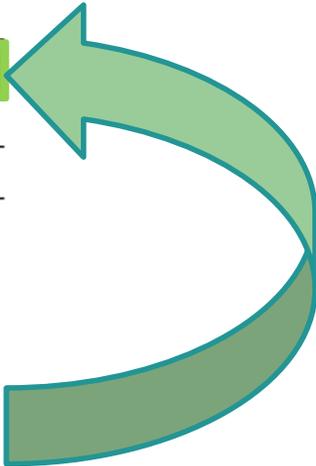
$$\frac{k \sum f_i}{4} = \frac{1 \times 40}{4} = 10$$

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$Q1 = l^* + \frac{\left[\frac{\sum f_i}{4} - F(\text{ant})\right] h^*}{f^*} = 154 + \frac{[10 - 4] \times 4}{9} = 154 + \frac{24}{9} = 154 + 2,66 = 156,7$$

Exemplo: Cálculo de Q3:

i	Estaturas (cm)	f_i	F_i
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	



Passo 1: Identificar a classe Q3 $\frac{k \sum f_i}{4} = \frac{3 \times 40}{4} = 30$

Passo 2: Aplicar a fórmula:

$$Q3 = l^* + \frac{\left[\frac{k \sum f_i}{4} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*} = 162 + \frac{[30 - 24] \times 4}{8} = 162 + \frac{24}{8} = 162 + 3 = 165$$

Exercícios:

3. Sobre a distribuição, calcule Q1 e Q3:

i	xi	fi
1	450 -550	8
2	550 -650	10
3	650 -750	11
4	750 -850	16
5	850 -950	13
6	950 -1150	5
7	1150 -1250	1
		$\Sigma=64$

$$\frac{k \sum fi}{4}$$

$$Q1 = l^* + \frac{\left[\frac{\sum fi}{4} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*}$$

$$Q3 = l^* + \frac{\left[\frac{3 \sum fi}{4} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*}$$



Exercícios:



i	x_i	f_i	F_i
1	450 550	8	8
2	550 650	10	18
3	650 750	11	29
4	750 850	16	45
5	850 950	13	58
6	950 1150	5	63
7	1150 1250	1	64
		$\Sigma=64$	

Q1:

$$\frac{k \sum f_i}{4} = \frac{1 \times 64}{4} = 16$$

$$Q1 = l^* + \frac{\left[\frac{\sum f_i}{4} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*} = 550 + \frac{[16 - 8] \times 100}{10} = 550 + \frac{800}{10} = 550 + 80 = 630$$

Exercícios:



i	xi	fi	Fi
1	450 -550	8	8
2	550 -650	10	18
3	650 -750	11	29
4	750 -850	16	45
5	850 -950	13	58
6	950 -1150	5	63
7	1150 -1250	1	64
		$\Sigma=64$	

Q3:

$$\frac{k \sum fi}{4} = \frac{3 \times 64}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

$$Q3 = l^* + \frac{\left[\frac{\sum fi}{4} - F(\text{ant})\right] h^*}{f^*} = 850 + \frac{[48 - 45] \times 100}{13} = 850 + \frac{300}{13} = 850 + 23,07 = 873,07$$

Intervalo Interquartil:

É a diferença entre Q1 e Q3, nesse intervalo há 50% dos elementos centrais da variável em estudo.

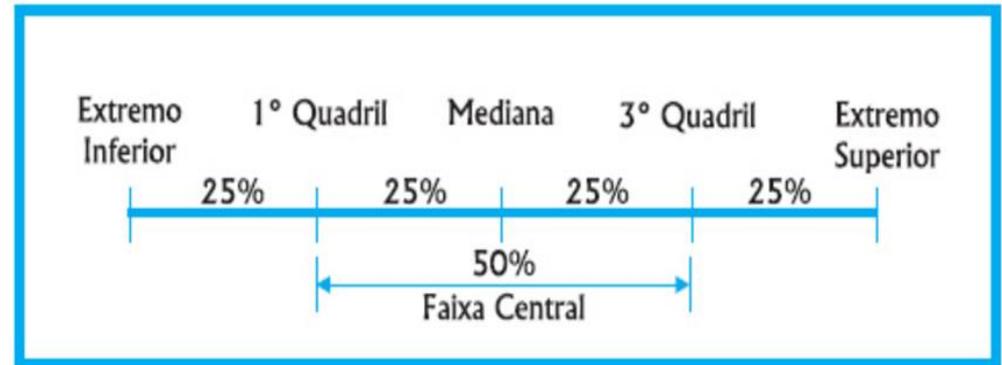
$$d = Q3 - Q1$$

Ex.:

Se: $d = Q3 - Q1$, logo:

$$d = 165 - 156,7$$

$$d = 8,3 \text{ cm,}$$



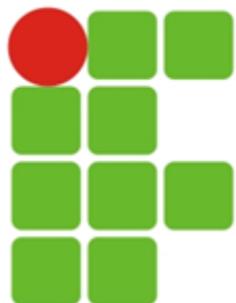
Ou seja: nesse intervalo há 50% dos valores centrais em estudo

Exercícios:



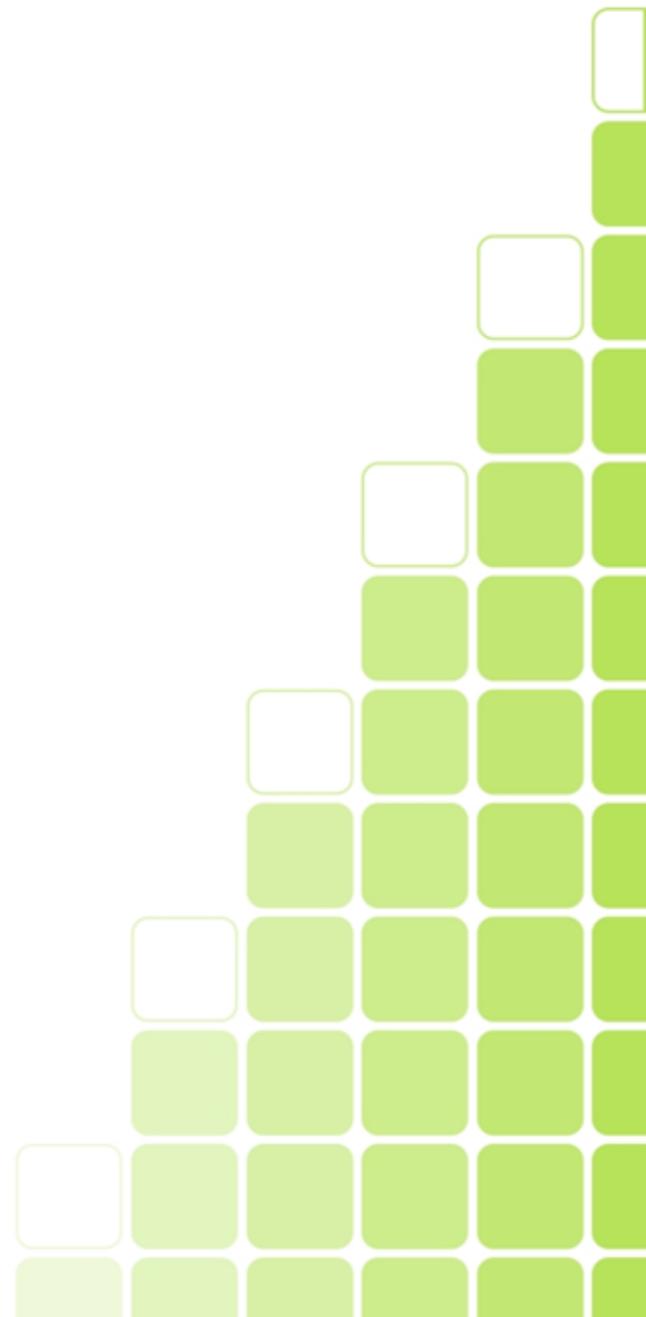
Calcule o intervalo interquartilístico do exemplo anterior:

$$b) d = Q3 - Q1 = 873,07 - 630 = 243,07$$



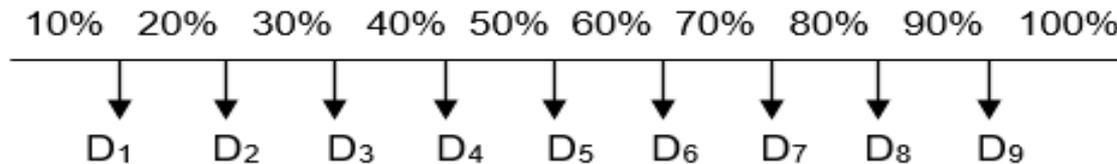
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Decis



Os Decis:

De maneira análoga aos percentis, os decis dividem uma série ordenada em 10 partes iguais, denotados por D1, D2,..D9.



Fórmulas básicas: $\frac{k \cdot n}{10}$ e $\frac{k \sum f_i}{10}$ onde k é o número do decil

De especial interesse é o **quinto decil**, que divide o conjunto em duas partes iguais e é igual ao segundo quartil, que por sua vez **é igual à mediana**

Exemplo: Calcular D_1 e D_8 do conjunto dado: $A \{7,12,15,20,2,4,6,18,10,24\}$

Inicialmente vamos colocar o conjunto em ordem crescente:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
2	4	6	7	10	12	15	18	20	24

a) Calcular D_1

1º Passo: determina-se a posição do primeiro Decil.

$$P_{D_1} = \frac{1 \cdot n}{10} = \frac{1 \cdot 10}{10} = 1 (\text{posição})$$

2º Passo: Procura-se no rol o valor do primeiro elemento;

3º passo: O valor do $D_1=2$ que corresponde a 10% do rol

b) Calculo do D_8

1º Passo: determina-se a posição do oitavo Decil.

$$P_{D_8} = \frac{8 \cdot n}{10} = \frac{8 \cdot 10}{10} = 8 (\text{posição})$$

2º Passo: Procura-se no rol o valor do oitavo elemento;

3º passo: O valor do $D_8=18$ que corresponde a 80% do rol

**Decis para
dados não
agrupados**

$$P_{Dk} = \frac{k \cdot n}{10}$$

Resolva

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade:

$$\{3, 9, 2, 8, 4, 6, 5, 9, 10, 4, 3, 5, 6, 11\}$$

Qual a idade que corresponde a 70% das crianças (D_7)?

$$P_{Dk} = \frac{k \cdot n}{10}$$

Resposta:

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade:

$$\{3, 9, 2, 8, 4, 6, 5, 9, 10, 4, 3, 5, 6, 11\}$$

b) Qual a idade que corresponde a 70% das crianças (D_7)?

$$P_{Dk} = \frac{k \cdot n}{10}$$

Passo 1: Organizar os dados: { 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 9, 9, 10, 11 }

Passo 2: Calcular D_7 : $D_7 = (7 \times 14) / 10$ logo: $D_7 = 98/10 = 9,8 \sim 10$

Passo 3: localizar o elemento de ordem 10:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	3	4	4	5	5	6	6	8	9	9	10	11

Logo: $D_7 = 8$



Decis para dados agrupados sem intervalo de classe

Exemplo:

Calcular D_3 e D_8 usando a seguinte tabela:

Quantidade de filhos dos funcionários de
uma pequena empresa.

<i>filhos</i>	<i>f</i>	<i>F</i>
0	18	18
1	35	53
2	46	99
3	28	127
4	25	152
5	10	162
6	5	167
7	3	170
	$\sum f = 170$	

$$P_{Dk} = \frac{k \sum fi}{10}$$

Decis para dados agrupados sem intervalo de classe

a) Cálculo do D_3

1º Passo: Calcula-se a posição do D_3

$$D_3 = \frac{3 \sum f}{10} = \frac{3 \cdot 170}{10} = 51 (\text{posição})$$

$$P_{Dk} = \frac{k \sum fi}{10}$$

2º passo: Procura-se a posição do D_3 :

Pela coluna da frequência acumulada, o D_3 está na 2º classe (F 53)

3º Passo: Encontrar o valor da variável correspondente:

O valor da variável na segunda classe é 1 filho, que corresponde a 30% da pesquisa.

b) Cálculo do D_8

1º Passo: Calcula-se a posição do D_8

$$D_8 = \frac{8 \sum f}{10} = \frac{8 \cdot 170}{10} = 144 (\text{posição})$$

2º passo: Procura-se a posição do D_8 :

Pela coluna da frequência acumulada, o D_8 está na 5º classe (F 152)

3º Passo: Encontrar o valor da variável correspondente:

O valor da variável na segunda classe é 4 filhos, que corresponde a 80% da pesquisa.

<i>filhos</i>	<i>f</i>	<i>F</i>
0	18	18
1	35	53
2	46	99
3	28	127
4	25	152
5	10	162
6	5	167
7	3	170
	$\sum f = 170$	

Resolva:

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

Qual o valor economizado por 40% das crianças (D_4)?

Valores (R\$)	Nº de crianças	F
10	2	2
15	6	8
20	8	16
25	15	31
30	13	44
35	11	55
40	5	60
	$\sum fi = 60$	

$$P_{Dk} = \frac{k \sum fi}{10}$$

Resposta:

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

Qual o valor economizado por 40% das crianças (D_4)?

$$P_{Dk} = \frac{k \sum fi}{10}$$

Passo 1: Calcular F

Passo 2: Calcular posição do D_4 : $PD_4 = (4 \times 60) / 10 = 24$

Passo 3: Localizar F 24 na tabela: está linha 4

Valores (R\$)	Nº de crianças	F
10	2	2
15	6	8
20	8	16
25	15	31
30	13	44
35	11	55
40	5	60
	$\sum fi = 60$	

Passo 4: verificar o elemento correspondente: R\$25, logo $D_4 = R\$25$

Decis para dados agrupados com intervalos de classe

Ex.: Calcule D3 para a distribuição:

i	Estaturas (cm)	f_i	F_i
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	

$$P_{Dk} = \frac{k \Sigma f_i}{10}$$

$$P_{Dk} = l^* + \frac{\left[\frac{k \cdot \Sigma f_i}{10} \right] - F(\text{ant}) \cdot h^*}{f^*}$$

Decis para dados agrupados com intervalos de classe

Ex.: Calcule D3 para a distribuição:

i	Estaturas (cm)	f_i	F_i
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	



$$P_{Dk} = \frac{k \Sigma f_i}{10}$$

$$Dk = \frac{k \Sigma f_i}{10} = \frac{3 \times 40}{10} = \frac{120}{10} = 12$$

$$P_{Dk} = l^* + \frac{\left[\frac{k \cdot \Sigma f_i}{10} \right] - F(\text{ant}) \cdot h^*}{f^*}$$

$$D3 = l^* + \frac{\left[\frac{k \Sigma f_i}{10} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*} = 154 + \frac{[12 - 4] \times 4}{9} = 154 + \frac{8 \times 4}{9} = 154 + \frac{32}{9} = 154 + 3,55 = 157,55$$

Resolva:

3. Sobre a distribuição, calcule D5

i	xi	fi
1	450I-550	8
2	550I-650	10
3	650I-750	11
4	750I-850	16
5	850I-950	13
6	950I-1150	5
7	1150I-1250	1
		$\Sigma=64$

$$P_{Dk} = \frac{k \sum fi}{10}$$

$$P_{Dk} = l * + \frac{\left[\frac{k \cdot \sum fi}{10} \right] - F(\text{ant}) \cdot h^*}{f^*}$$



Exercícios:



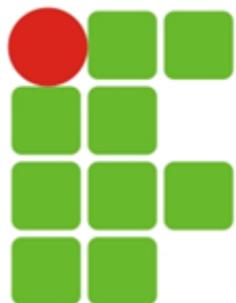
i	xi	fi	Fi
1	450 550	8	8
2	550 650	10	18
3	650 750	11	29
4	750 850	16	45
5	850 950	13	58
6	950 1150	5	63
7	1150 1250	1	64
		$\Sigma=64$	



d) D5

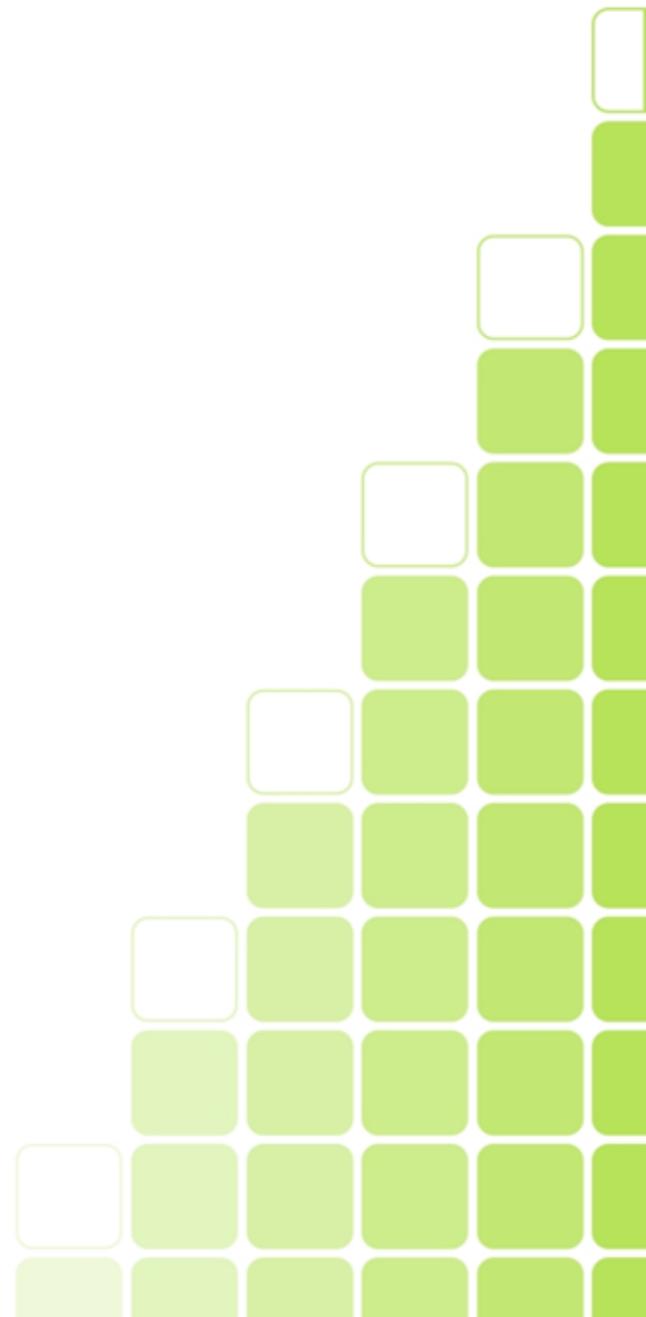
$$D5 = \frac{k \sum fi}{10} = \frac{5 \times 64}{10} = \frac{320}{10} = 32, \text{ classe 4, 750|850}$$

$$D3 = l^* + \frac{[\frac{k \sum fi}{10} - F(\text{ant})] h^*}{f^*} = 750 + \frac{[32 - 29] \times 100}{16} = 750 + \frac{3 \times 100}{16} = 750 + \frac{300}{16} = 750 + 18,75 = 768,75$$



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Percentis



Os Percentis:

Denominamos **percentis** os 99 valores que dividem uma classe em 100 partes iguais

Indicamos P_1, P_2, \dots, P_{99}

Evidentemente:

$$P_{50} = D_5 = Q_2 = M_d; \quad P_{25} = Q_1 \text{ e } P_{75} = Q_3$$

Para cálculo do percentil usamos $\frac{k \sum f_i}{100}$, onde k é a ordem do percentil

Percentis para dados não agrupados

Verificamos que o raciocínio é o mesmo utilizado para o cálculo do Quartil e Decil.

$$P_{Pk} = \frac{k \cdot n}{100}$$

Consideremos o exemplo abaixo:

1) Calcular o P_{28} e P_{82} do conjunto $B \{15, 2, 4, 6, 10, 12, 13, 7, 21, 18, 20\}$

Devemos inicialmente ordenar os valores:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
2	4	6	7	10	12	13	15	18	20	21

a) Cálculo do P_{28}

1° Passo: Determinar a posição do P_{28} $P_{28} = \frac{28 \cdot n}{100} = \frac{28 \cdot 11}{100} = 3,08$

2° Passo: procura-se no rol o valor da posição do 3° elemento;

3° Passo: A variável que corresponde à posição desejada é o número 6

$$\mathbf{P_{28} = 6}$$

b) Cálculo do P_{82}

1° Passo: Determinar a posição do P_{82} $P_{82} = \frac{82 \cdot n}{100} = \frac{82 \cdot 11}{100} = 9,02$

2° Passo: procura-se no rol o valor da posição do 9° elemento;

3° Passo: A variável que corresponde à posição desejada é o número 18

$$\mathbf{P_{82} = 18}$$

Exercícios:

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade:

$\{3, 9, 2, 8, 4, 6, 5, 9, 10, 4, 3, 5, 6, 11\}$

c) Qual a idade que corresponde a 45% das crianças (P_{45})?

$$P_{Pk} = \frac{k \cdot n}{100}$$



Exercícios:

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade:

$$\{3, 9, 2, 8, 4, 6, 5, 9, 10, 4, 3, 5, 6, 11\}$$

c) Qual a idade que corresponde a 45% das crianças (P_{45})?

$$P_{Pk} = \frac{k \cdot n}{100}$$

Passo 1: Organizar os dados: $\{2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 9, 9, 10, 11\}$

Passo 2: Calcular P_{45} : $P_{45} = (45 \times 14) / 100$ logo: $P_{45} = 630/100 = 6,3 \sim 6$

Passo 3: localizar o elemento de ordem 14:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	3	4	4	5	5	6	6	8	9	9	10	11

Logo: $P_{45} = 5$



Percentis para dados agrupados sem intervalo de classe

O cálculo do Percentil para a tabela sem intervalo de classe é o mesmo que para os cálculos dos Quartis e Decis. Estudemos esses cálculos através do exemplo a seguir:

Exemplo: Calcular P_{45} e P_{93} da tabela

Número de quartos/chalés em Bonito/MS/07

<i>Número de quartos/chalés</i>	f	F
1	15	15
2	30	45
3	20	65
4	12	77
5	10	87
6	8	95
	$\sum f_i = 95$	

$$P_{Pk} = \frac{k \cdot \sum fi}{100}$$

Percentis para dados agrupados sem intervalo de classe

Número de quartos/chalés em Bonito/MS/07

Número de quartos/chalés	f	F
1	15	15
2	30	45
3	20	65
4	12	77
5	10	87
6	8	95
$\sum f_i = 95$		

$$P_{Pk} = \frac{k \cdot \sum fi}{100}$$

a) Calcular P_{45}

1° Passo: Determinar a posição do P_{45}

$$P_{45} = \frac{k \cdot \sum fi}{100} = \frac{45 \cdot 95}{100} = 42,75$$

2° Passo: Procurar a posição do 43 elemento pela coluna da frequência acumulada, podemos observar que o elemento de posição 43 está na segunda classe;

3° Passo: O valor da variável que corresponde a 45% da pesquisa revelou que os pesquisados preferem até 2 quartos por chalé.

b) Calcular P_{93}

1° Passo: Determinar a posição do P_{93}

$$P_{93} = \frac{k \cdot \sum fi}{100} = \frac{93 \cdot 95}{100} = 88,35$$

2° Passo: Procurar a posição do 88° elemento pela coluna da frequência acumulada, podemos observar que o elemento de posição 88 está na sexta classe;

3° Passo: O valor da variável que corresponde a 93% da pesquisa revelou que os pesquisados preferem até 6 quartos por chalé.

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

c) Qual o valor economizado por 92% das crianças (P_{92})?

Valores (R\$)	Nº de crianças	F
10	2	2
15	6	8
20	8	16
25	15	31
30	13	44
35	11	55
40	5	60
	$\sum f_i = 60$	

$$P_{Pk} = \frac{k \sum fi}{100}$$

Resposta:

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

c) Qual o valor economizado por 92% das crianças (P_{92})?

$$P_{Pk} = \frac{k \sum fi}{100}$$

Passo 1: Calcular F

Passo 2: Calcular posição do P92: $PP_{92} = (92 \times 60) / 100 = 55,2$

Passo 3: Localizar F 55,2 na tabela: está linha 7

Valores (R\$)	Nº de crianças	F
10	2	2
15	6	8
20	8	16
25	15	31
30	13	44
35	11	55
40	5	60
	$\sum fi = 60$	

Passo 4: Verificar o elemento correspondente: R\$40, logo $P_{92} = R\$40$

Percentis para dados agrupados com intervalo de classe

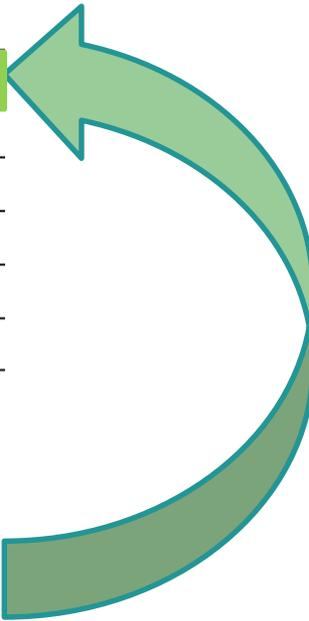
Ex.: Para o exemplo das estaturas dos alunos, calcular P8 e P20

i	Estaturas (cm)	f_i	F_i
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	

Percentis para dados agrupados com intervalo de classe

Ex.: Para o exemplo das estaturas dos alunos, calcular P8

i	Estaturas (cm)	f_i	F_i
1	150 - 154	4	4
2	154 - 158	9	13
3	158 - 162	11	24
4	162 - 166	8	32
5	166 - 170	5	37
6	170 - 174	3	40
		$\Sigma = 40$	



$$P_k = \frac{k \Sigma f_i}{100} = \frac{8 \times 40}{100} = 3,2$$

$$P_8 = l^* + \frac{\left[\frac{k \Sigma f_i}{100} - F(\text{ant}) \right] h^*}{f^*} = 150 + \frac{[3,2 - 0] \times 4}{4} = 150 + \frac{12,8}{4} = 150 + 3,2 = 153,2$$

Resolva:



Ex.: Para o exemplo abaixo, calcular P20

i	xi	fi	Fi
1	450 550	8	8
2	550 650	10	18
3	650 750	11	29
4	750 850	16	45
5	850 950	13	58
6	950 1150	5	63
7	1150 1250	1	64
		$\Sigma=64$	

Exercícios:



i	xi	fi	Fi
1	450 -550	8	8
2	550 -650	10	18
3	650 -750	11	29
4	750 -850	16	45
5	850 -950	13	58
6	950 -1150	5	63
7	1150 -1250	1	64
		$\Sigma=64$	

c)

P20:

$$Pk = \frac{k \sum fi}{100} = \frac{20 \times 64}{100} = \frac{1280}{100} = 12,8$$

$$P20 = l^* + \frac{[\frac{k \sum fi}{100} - F(\text{ant})] h^*}{f^*} = 550 + \frac{[12,8 - 8] \times 100}{10} = 550 + \frac{4,8 \times 100}{10} = 550 + \frac{480}{10} = 550 + 48 = 598$$

Relações:

DECIS - PERCENTIS

$$D_1 = P_{10}$$

$$D_4 = P_{40}$$

$$D_7 = P_{70}$$

$$D_2 = P_{20}$$

$$D_5 = P_{50}$$

$$D_8 = P_{80}$$

$$D_3 = P_{30}$$

$$D_6 = P_{60}$$

$$D_9 = P_{90}$$

QUARTIS- PERCENTIS

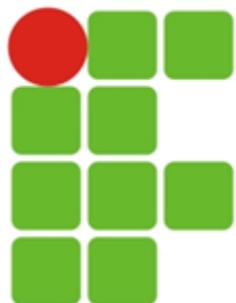
$$Q_1 = P_{25}$$

$$Q_2 = P_{50}$$

$$Q_3 = P_{75}$$

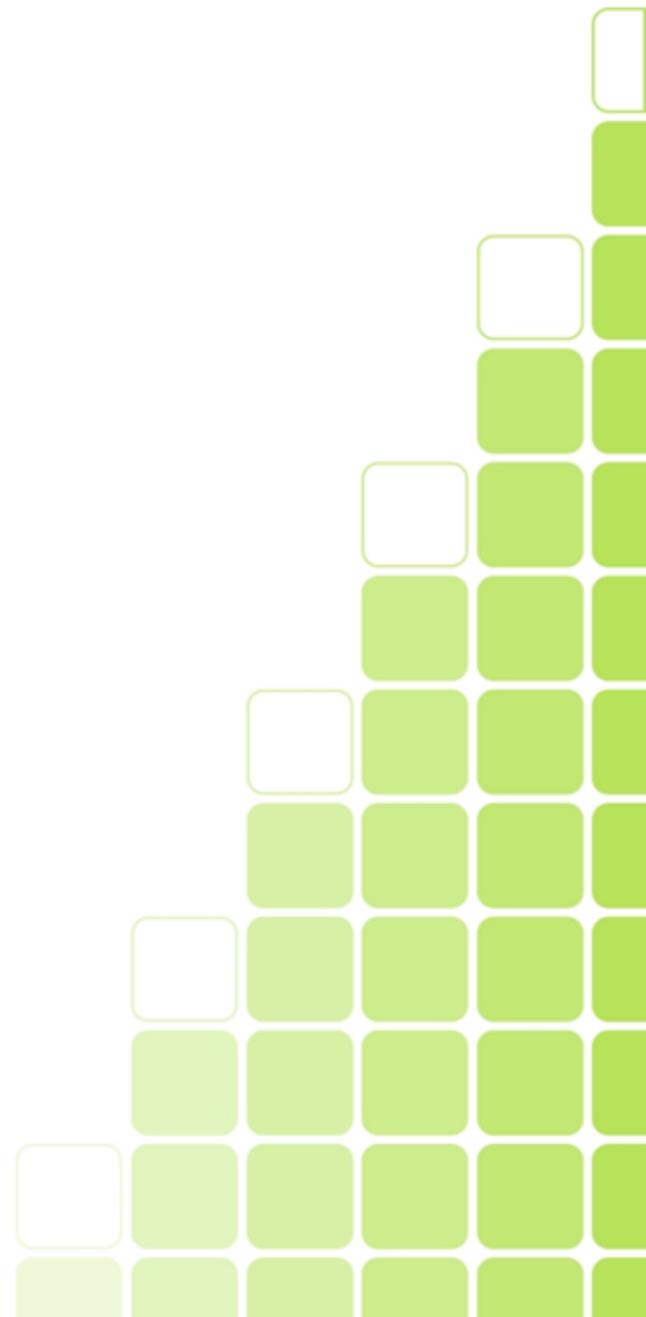
Dúvidas:





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Exercícios



Exercícios:

1. Considere o conjunto de valores que representa as idades de um grupo de crianças de uma comunidade:

$$\{3, 9, 2, 8, 4, 6, 5, 9, 10, 4, 3, 5, 6, 11\}$$

a) Qual a idade que corresponde a 25% das crianças (Q_1)?

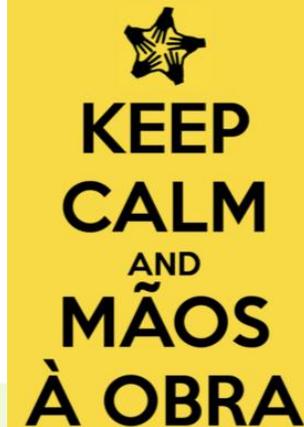
- a) $Q_1=3$
- b) $Q_1=5$
- c) $Q_1=4$
- d) $Q_1=6$

b) Qual a idade que corresponde a 70% das crianças (D_7)?

- a) $D_7=6$
- b) $D_7=8$
- c) $D_7=5$
- d) $D_7=9$

c) Qual a idade que corresponde a 45% das crianças (P_{45})?

- a) $P_{45} = 4$
- b) $P_{45} = 8$
- c) $P_{45} = 5$
- d) $P_{45} = 6$



Exercícios:

2. A tabela ao lado representa os valores economizados por crianças para a compra do presente do dia das mães.

a) Qual o valor economizado por 75% das crianças (Q_3)?

- a) $Q_3 = 30$
- b) $Q_3 = 40$
- c) $Q_3 = 35$
- d) $Q_3 = 25$

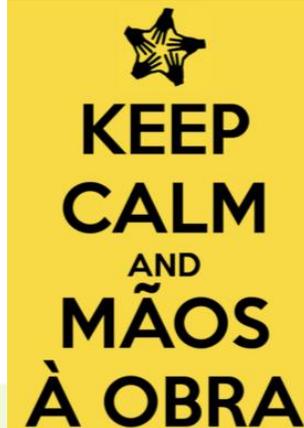
b) Qual o valor economizado por 40% das crianças (D_4)?

- a) $D_4 = 25$
- b) $D_4 = 20$
- c) $D_4 = 35$
- d) $D_4 = 30$

c) Qual o valor economizado por 92% das crianças (P_{92})?

- a) $P_{92} = 35$
- b) $P_{92} = 30$
- c) $P_{92} = 40$
- d) $P_{92} = 38$

Valores (R\$)	Num. de crianças
10	2
15	6
20	8
25	15
30	13
35	11
40	5
	$\sum f_i = 60$



Exercícios:

3. Sobre a distribuição, calcule:

a) Q1 e Q3:

b) d:

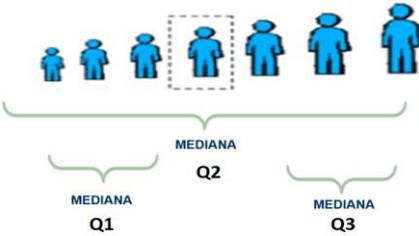
c) P20:

d) D5:

i	xi	fi
1	450I-550	8
2	550I-650	10
3	650I-750	11
4	750I-850	16
5	850I-950	13
6	950I-1150	5
7	1150I-1250	1
		$\Sigma=64$

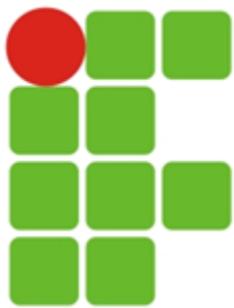




	DADOS NÃO AGRUPADOS	DADOS AGRUPADOS SEM INTERVALO DE CLASSE (LOCALIZAR F E SEU VALOR CORRESPONDENTE)	DADOS AGRUPADOS COM INTERVALO DE CLASSE (LOCALIZAR F E OBTER VALORES DA CLASSE CORRESPONDENTE)
QUARTIL		$P_{QK} = \frac{K \sum f_i}{4}$	$Q_k = l^* + \left[\frac{\frac{K \cdot \sum f_i}{4} - F_{ant}}{f^*} \right] \cdot h^*$
DECIL	$P_{Dk} = \frac{k.n}{10}$	$P_{DK} = \frac{K \sum f_i}{10}$	$D_k = l^* + \left[\frac{\frac{K \cdot \sum f_i}{10} - F_{ant}}{f^*} \right] \cdot h^*$
PERCENTIL	$P_{Pk} = \frac{k.n}{100}$	$P_{PK} = \frac{K \sum f_i}{100}$	$P_k = l^* + \left[\frac{\frac{K \cdot \sum f_i}{100} - F_{ant}}{f^*} \right] \cdot h^*$

Dúvidas:





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Probabilidade

Estatística para a Qualidade

Prof. Eveline Pereira

Experimento Aleatório:

Experimento aleatório:

Em quase tudo, em maior ou menor grau, vislumbramos o acaso.

Assim, a afirmação “**meu time vai vencer hoje**” pode resultar:

- a) que ele vença
- b) que apesar do favoritismo, ele perca
- c) que ele empate

O resultado final, **depende do acaso.**

Esses fenômenos são chamados de aleatórios.

Conceitos:

- **Experimentos ou fenômenos aleatórios** são aqueles que mesmo repetidos n vezes, sob condições semelhantes, são imprevisíveis
- **Espaço amostral (S)** é o conjunto de **resultados possíveis** para um evento.
Ex.: ao jogar um dado os resultados possíveis são 1,2,3,4,5,6.
- **Evento (E)** é qualquer subconjunto do espaço amostral S de um experimento aleatório.

Conceitos:

Assim, qualquer que seja E , se $E \subset S$ (está contido em S), então E é um evento de S .

Ex.: “obter um n° par no lançamento de um dado”: $A = \{2, 4, 6\} \subset S$; logo, A é um evento de S

- Se $E = S$: E é um evento certo
Ex: “obter um n° menor ou igual a 6 no lançamento de um dado”: $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset S$; logo, B é um evento certo de S
- Se $E \subset S$ e E é um conjunto unitário, E é chamado de evento elementar de S
Ex: “obter o n°4 no lançamento de um dado”: $C = \{4\} \subset S$; logo, C é um evento elementar de S
- Se $E = \phi$. E é chamado de evento impossível:
Ex: “obter um n° maior que 6 no lançamento de um dado”:
 $D = \phi \subset S$; logo, D é um evento impossível de S

Probabilidade:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Onde:

$n(A)$ é o nº de elementos de A

$n(S)$ é o nº de elementos de S

Ex.:

a) Qual a probabilidade de obter cara no lançamento de uma moeda?

$S = \{\text{Cara, Coroa}\} = 2$

$A = \{\text{Ca}\} = 1$

$$P(\text{Ca}) = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ ou } 50\%$$



b) no lançamento de um dado:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

-a probabilidade de obter um n° par:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6 \quad A = \{2, 4, 6\} = 3$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ ou } 50\%$$

-a probabilidade de obter um n° menor ou igual a 6:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6 \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1 \text{ ou } 100\%$$

-a probabilidade de obter o n°4:

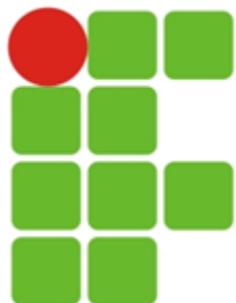
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6 \quad A = \{4\} = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{6} = 0,166 \text{ ou } 16,6\%$$

-a probabilidade de obter um n° maior que 6:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6 \quad A = \{ \phi \} = 0$$

$$P(A) = \frac{0}{6} = 0 \text{ ou } 0\%$$



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Eventos Complementares



p é probabilidade de que o evento ocorra

q é probabilidades de que o evento não ocorra

$$p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p$$

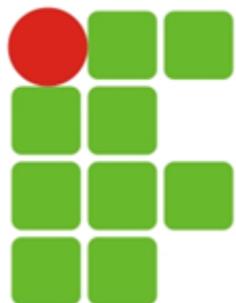
Ex.: a probabilidade de não obter o n° 4 no lançamento do dado

$$q = 1 - p$$

$$q = 1 - \frac{1}{6}$$

$$q = 1 - 0,166 = 0,83 \text{ ou } 83\%$$

$$p+q=1 \text{ logo, } 1/6 + 5/6 = 1$$



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Eventos Independentes

Eventos Independentes

São eventos independentes **quando realização ou não realização de um não interfere em outro evento.**

Ex.: o lançamento de dois dados.

Se os eventos são independentes a probabilidade de que se realizem simultaneamente é igual ao **produto** das probabilidades de dos dois eventos

Assim **$P = P1 \times P2$** , onde:

P1 é probabilidade de realização do evento 1

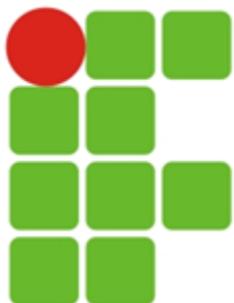
P2 é probabilidade de realização do evento 2

Ex.: Qual a probabilidade de obtermos os números 1 e 5 no lançamento de dois dados?

$$P1 = 1/6$$

$$P5 = 1/6$$

$$P = p1 \times p5 = 1/6 \times 1/6 = 1/36 = 0,027 \text{ ou } 2,7\%$$



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Eventos mutualmente exclusivos



Eventos mutuamente exclusivos: quando a realização de um, **impede** a realização do outro

Ex.: o lançamento de uma moeda, obter cara significa não obter coroa

A probabilidade de que um ou outro evento se realize é igual a **soma** das probabilidades de cada um. Assim:

$$P = P1 + P2, \text{ onde:}$$

P1 é probabilidade de realização do evento 1

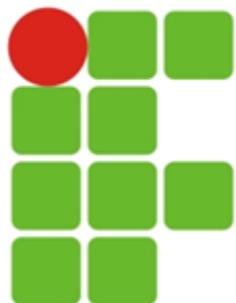
P2 é probabilidade de realização do evento 2

Ex.: No lançamento de um dado, obter 3 ou 5

$$P = P3 + P5 = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3 = 0,33 \text{ ou } 33\%$$

Dúvidas:





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Exercícios



**KEEP
CALM
AND
MÃOS
À OBRA**

Exercícios:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

1. A probabilidade de obter um ás de ouro ao retirarmos uma carta de um baralho? R.: 1,92%
2. A probabilidade de obter um rei ao retirarmos uma carta de um baralho? R.: 7,69%
3. Em um lote de 12 peças 4 são defeituosas. Sendo retirada uma peça, calcular:
 - a) a probabilidade de ser defeituosa: R.: 33%
 - b) a probabilidade de não ser defeituosa: R.: 66%
4. No lançamento de 2 dados, qual a probabilidade de obter a soma dos resultados igual a 5? R.: 11%

Exercícios:

5. De 2 baralhos são retiradas simultaneamente uma carta de cada. Qual a probabilidade da primeira ser um rei e da segunda ser o 5 de paus? R.: 0,1479%

6. A urna A tem 3 bolas brancas, 4 pretas e 2 verdes; a urna B tem 5 brancas, 2 pretas e 1 verde; a urna C contém 2 brancas; 3 pretas, 4 verdes. Uma bola é retirada de cada urna. Qual a probabilidade de as três bolas retiradas, da 1ª, da 2ª e da 3ª urna serem, respectivamente, branca, preta e verde? R.: 3,7%

7. De um baralho retiram-se duas cartas sem reposição. Qual é a probabilidade de a primeira ser às de paus e a da segunda ser o rei de paus? R.: 0,037%

8. Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos uma carta de um baralho? R.: 23,07%

Exercícios:

9. Qual a probabilidade de sair uma carta de ouro ou copas quando retiramos uma carta e um baralho? R.: 50%

10. No lançamento de um dado qual a probabilidade de obter um número não inferior a 5 R.: 33%

11. São dados 2 baralho. Tiramos ao mesmo tempo uma carta de cada um. Qual a probabilidade de tirarmos uma dama e um rei, não necessariamente nessa ordem? R.: 1,18%

12. Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade da soma dos resultados ser 10 ou maior que 10? R.: 16,66%

Exercícios:

12. Dois dados são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade da soma dos resultados ser 10 ou maior que 10

Soma pode ser 10,11 ou 12

10: (4,6); (5,5); (6,4)

- $(4,6) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

- $(5,5) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

- $(6,4) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

$$1/36 + 1/36 + 1/36 = 3/36$$

11: (5,6); (6,5)

- $(5,6) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

- $(6,5) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

$$1/36 + 1/36 = 2/36$$

12: (6,6)

- $(6,6) = 1/6 \times 1/6 = 1/36$

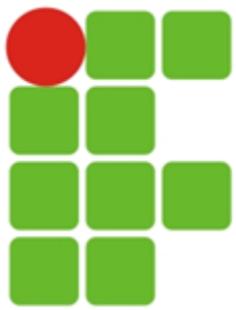
$$1/36$$

Eventos mutuamente exclusivos:

$$3/36 + 2/36 + 1/36 = 6/36 = 1/6 = 16,66\%$$

Dúvidas:





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Curva Normal ou Curva de Gauss

Estatística para a Qualidade

Prof. Eveline Pereira

Para entender o que é **distribuição normal**, é necessário, primeiramente, definir **evento aleatório**.

Evento aleatório é aquele cuja **ocorrência individual não obedece a regras ou padrões** que permitam fazer previsões acertadas, como, por exemplo, qual face de um dado lançado cairá para cima.

A estatística mostra que, **apesar de a ocorrência individual destes eventos aleatórios ser imprevisível é possível tirar algumas conclusões a partir de um conjunto suficientemente grande deles.**

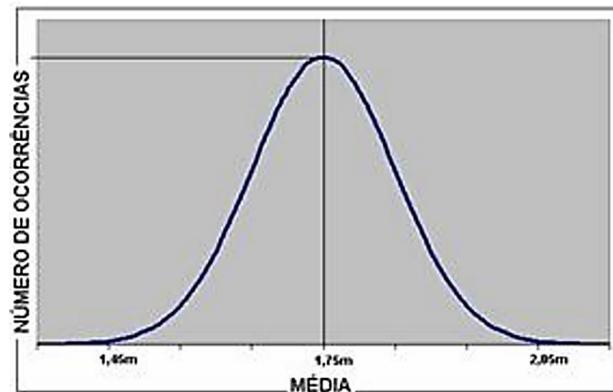
Para entender o que é **distribuição normal**, é necessário, primeiramente, definir **evento aleatório**.

Evento aleatório é aquele cuja **ocorrência individual não obedece a regras ou padrões** que permitam fazer previsões acertadas, como, por exemplo, qual face de um dado lançado cairá para cima.

A estatística mostra que, **apesar de a ocorrência individual destes eventos aleatórios ser imprevisível é possível tirar algumas conclusões a partir de um conjunto suficientemente grande deles.**

Muitos dos conjuntos de eventos aleatórios **apresentam padrões** que não são identificáveis em cada evento isoladamente, como por exemplo, a tendência de os eventos se concentrarem próximos a uma posição que representa uma média matemática deles. Assim, **a quantidade de eventos diminui constante e gradativamente à medida que nos afastamos da média.**

Ex.: Um levantamento das estaturas de homens adultos, em uma amostragem significativa, tende a posicionar a maioria das medidas na chamada estatura mediana, entre 1,70 e 1,80m. Já as estaturas entre 1,40 e 1,50m e entre 2,00 e 2,10m tendem a apresentar poucas ocorrências.

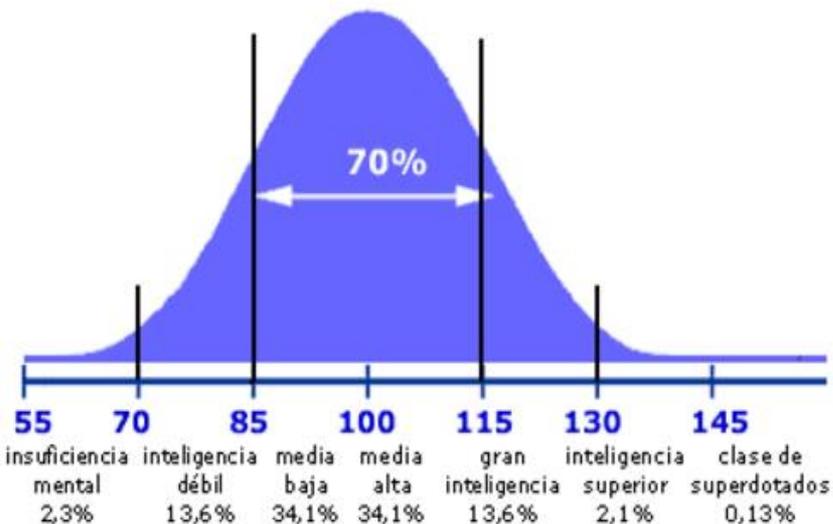


Distribuição normal

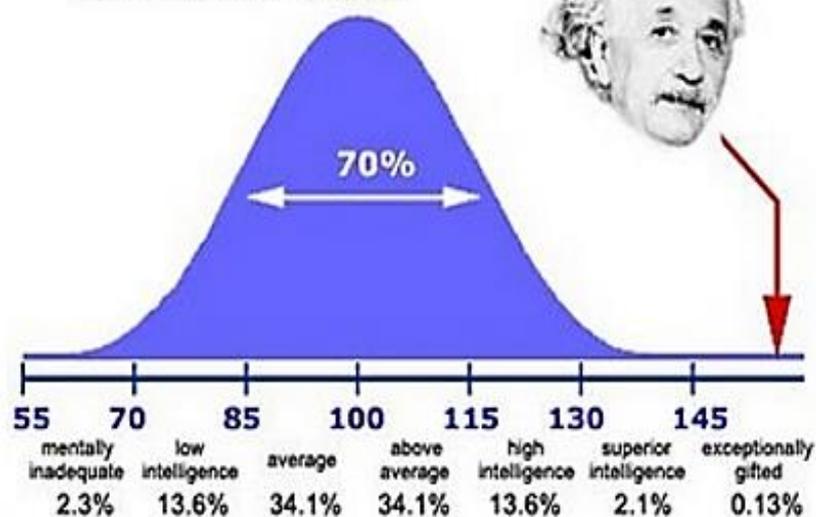
Eventos aleatórios que seguem este padrão enquadram-se na chamada "**distribuição normal**", representada pela curva também conhecida como Curva de Gauss ou Curva do Sino.

Introdução

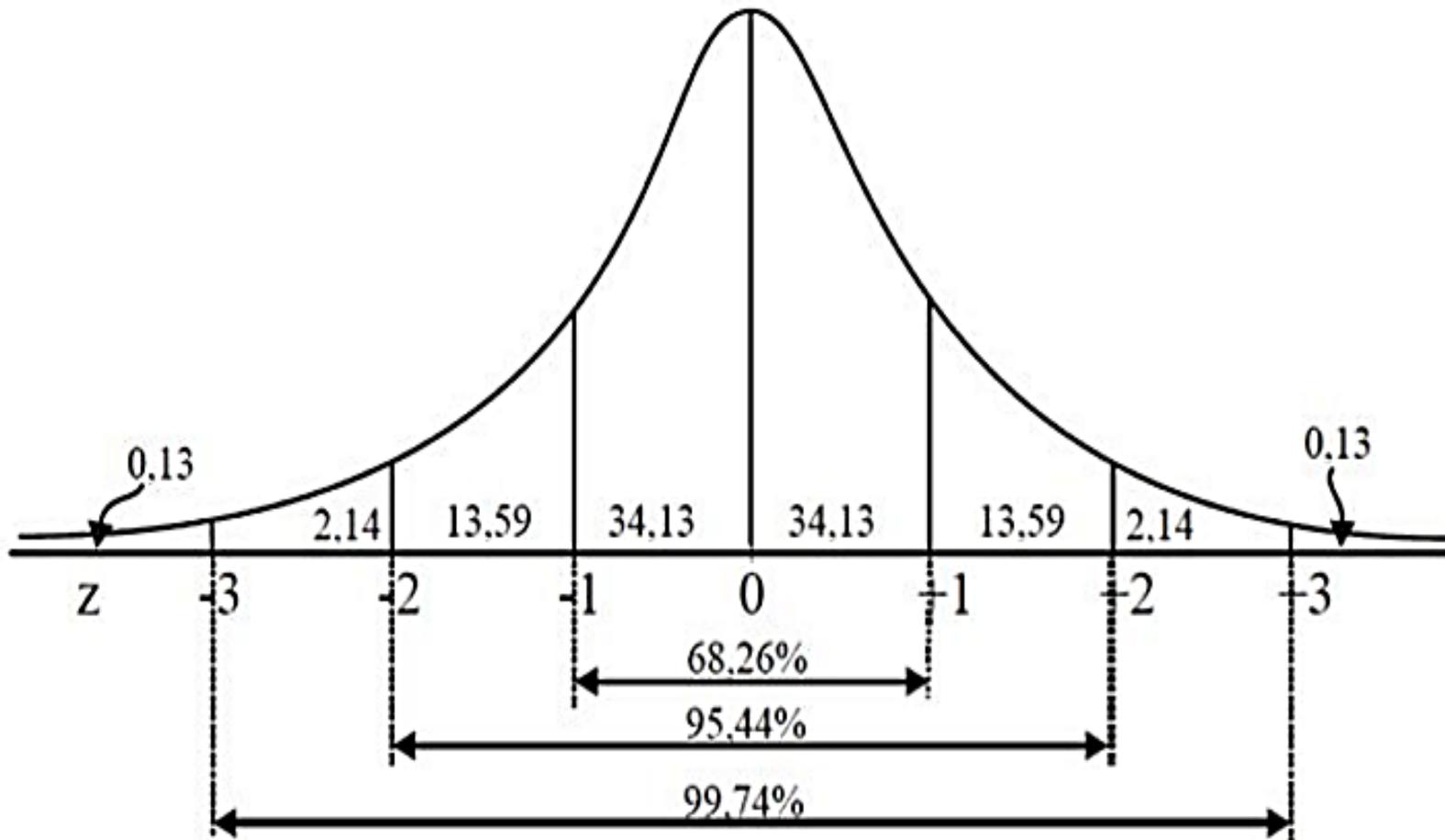
CI



Einstein's IQ = 160+
What about yours ?



Curva Normal ou Curva de Gauss:



Curva Normal e suas Propriedades

1ª a variável aleatória X pode assumir qualquer valor real

2ª a curva normal tem forma de sino e é simétrica em torno da média

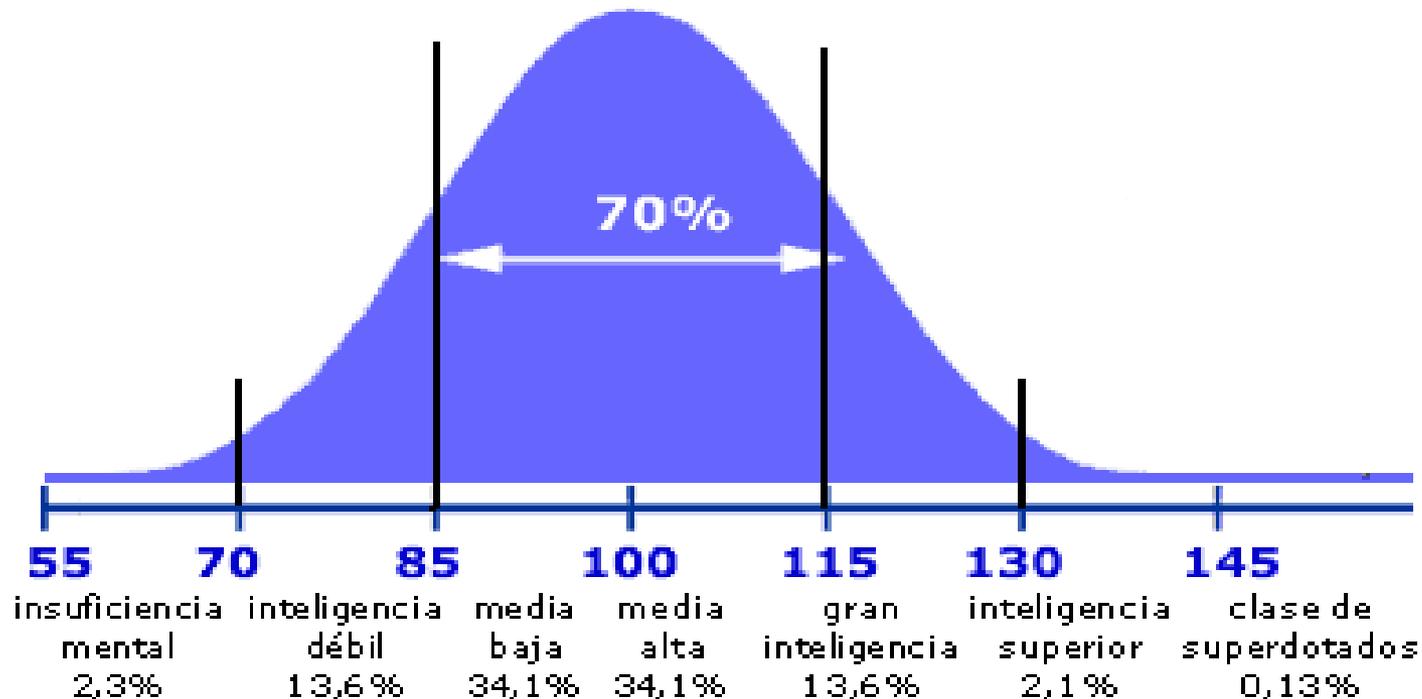
3ª A área total entre a curva e o eixo das abcissas é igual a 1

4ª a curva normal é assintótica em relação ao eixo das abcissas, isto é, se aproxima indefinidamente dele mas não o toca

5ª Como a curva é simétrica em relação à média, a probabilidade de ocorrer um valor maior que a média ou menor que ela é a mesma.

Curva Normal: Aplicação

Quando temos em mãos uma variável aleatória com distribuição normal, nosso principal interesse é **obter a probabilidade dessa variável aleatória assumir um valor em um determinado intervalo.**

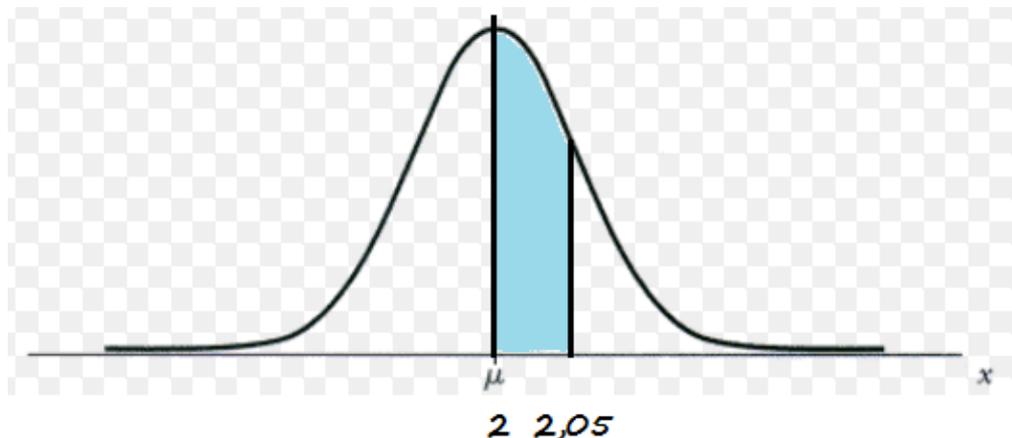


Curva Normal: Aplicação

Ex.: Seja X a variáveis que representa o diâmetro dos parafusos produzidos por certas máquinas. Vamos supor que essa variável tenha distribuição normal com $\bar{x}=2\text{cm}$ e $s= 0,05$.

Pode haver interesse em conhecer a probabilidade de um parafuso ter um diâmetro entre 2 e 2,05.

Essa probabilidade é indicada por $P(2 < X < 2,05)$ que corresponde a área destacada na curva normal.

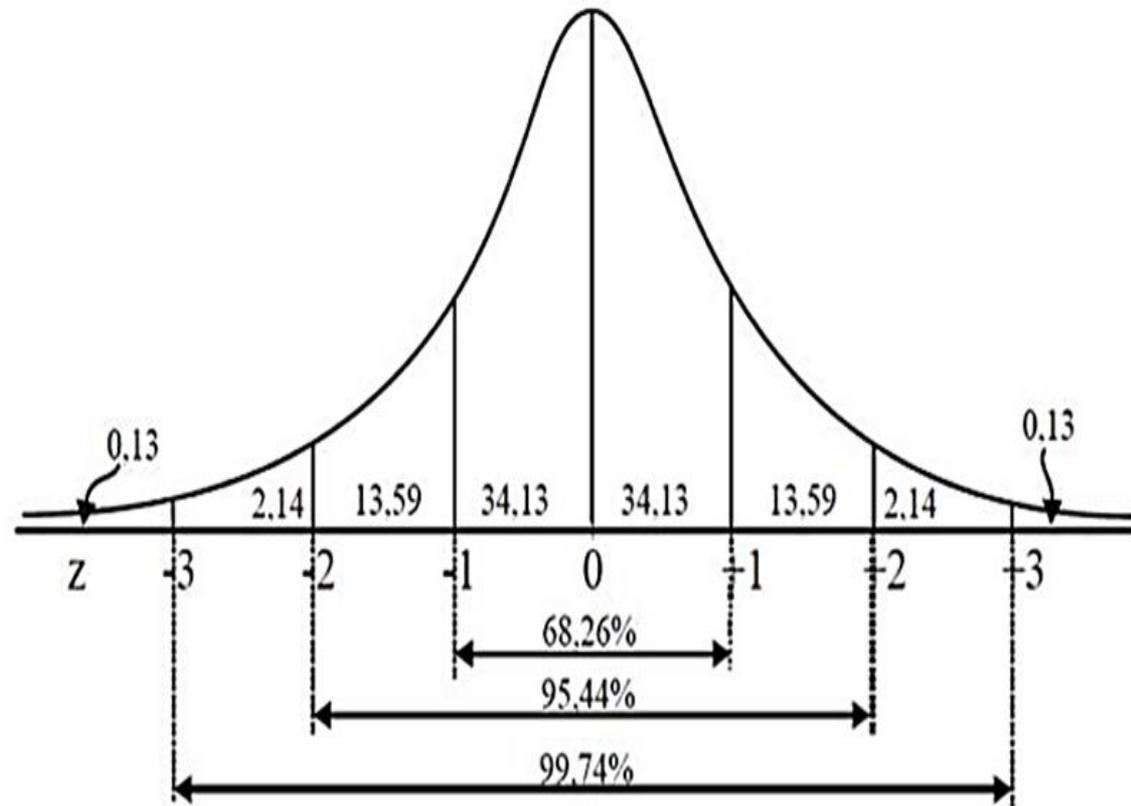
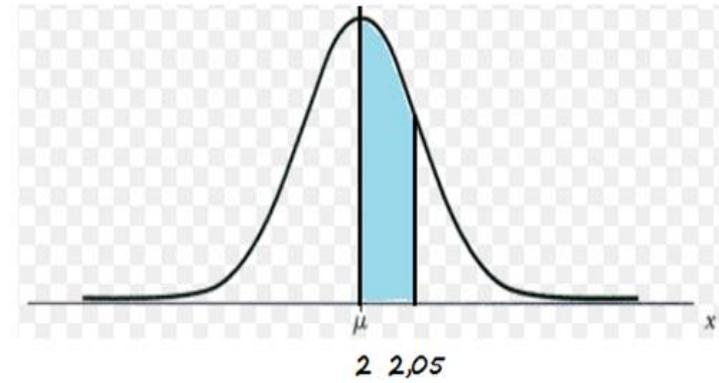


Curva Normal: Aplicação

Qualquer valor de X vindo de uma população que segue a distribuição normal pode ser convertido no valor z da distribuição normal padrão equivalente através da fórmula:

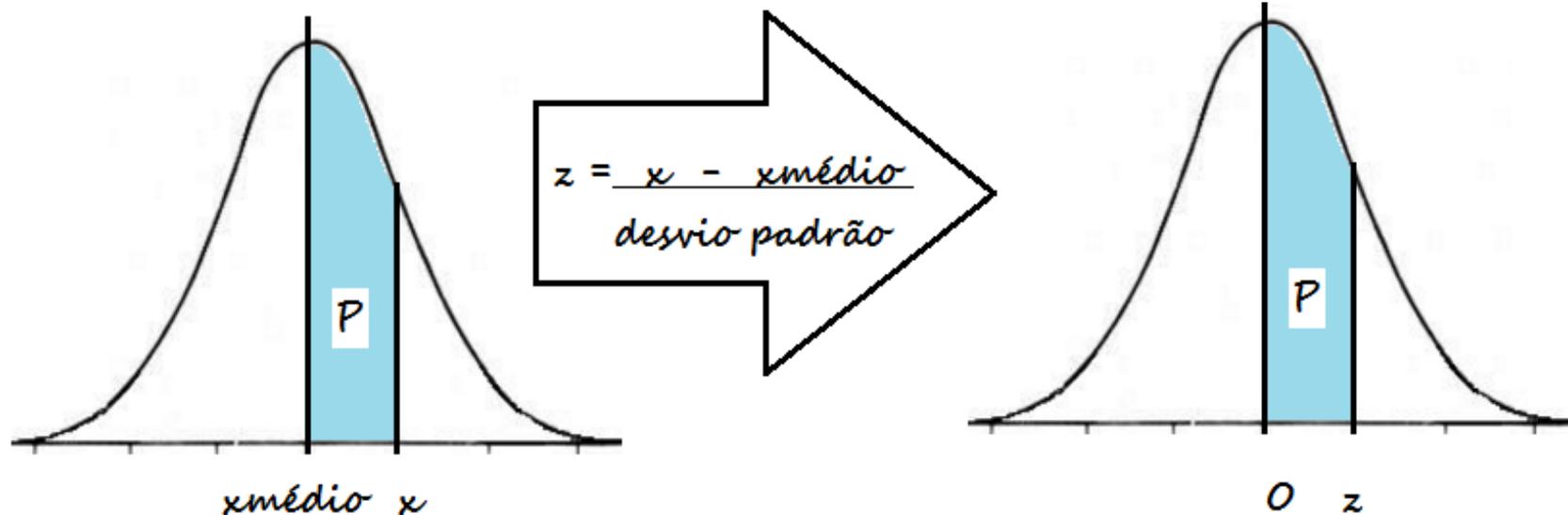
$$z = \frac{x - x_{\text{médio}}}{s}$$

O valor de z reposiciona o valor original de X em termos do número de unidades do desvio padrão pelo qual o valor original se difere da média da distribuição



Curva Normal: Aplicação

O cálculo direto dessa probabilidade exige um conhecimento matemático superior ao que dispomos em um curso de ensino médio, mas podemos contornar esse problema, para isso, basta aceitar que X é uma variável aleatória com distribuição normal, média \bar{x} e desvio padrão s , então a variável $z = \frac{x - x_{\text{médio}}}{s}$ tem distribuição normal reduzida, isto é, tem **distribuição normal, média 0 e desvio padrão 1**.



Curva Normal: Aplicação

Temos então, que se X é uma variável aleatória com distribuição normal, $x_{\text{médio}}$ e desvio padrão, podemos escrever:

$P(x_{\text{médio}} < X < x) = P(0 < Z < z)$, assim para o nosso exemplo temos:

1. queremos calcular a probabilidade de $P(2 < X < 2,05)$, para isso é necessário calcular o valor de z que corresponde a $x=2,05$

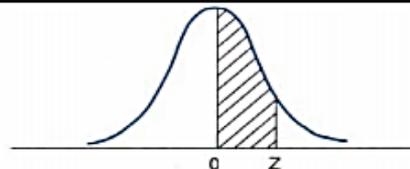
$$z = \frac{x - x_{\text{médio}}}{s} \Rightarrow z = \frac{2,05 - 2}{0,04} = 1,25$$

Na tabela buscamos o valor para $z=1,25$, que corresponde a 0,3944. Assim a probabilidade do parafuso ter diâmetro médio entre 2 e 2,05 é 0,3944. Escrevemos então:

$$P(2 < X < 2,05) = P(0 < Z < 1,25) = 0,3944 = 39,44\%$$

ANEXO II

**ÁREA SUBTENDIDA PELA
CURVA NORMAL REDUZIDA DE 0 A Z**



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995
3,3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3,5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,6	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Determine as probabilidades:

a) $P(-1,25 < Z < 0)$

b) $P(-0,5 < Z < 1,48)$

c) $P(0,8 < Z < 1,23)$

d) $P(Z > 0,6)$

e) $P(Z < 0,92)$

Exercícios Resolvidos

2. Os salários semanais dos operários industriais são distribuídos normalmente em torno da média R\$500,00, com desvio padrão R\$ 40,00. Calcule a probabilidade de um operário ter um salário semanal situado entre R\$ 490,00 e R\$ 520,00.

Passo 1: determinar os valores da variável normal reduzida z :

$$z = \frac{x - x_{\text{médio}}}{s} \Rightarrow z = \frac{490 - 500}{40} = -0,25$$

$$z = \frac{x - x_{\text{médio}}}{s} \Rightarrow z = \frac{520 - 500}{40} = 0,5$$

Passo 2: encontrar a probabilidade:

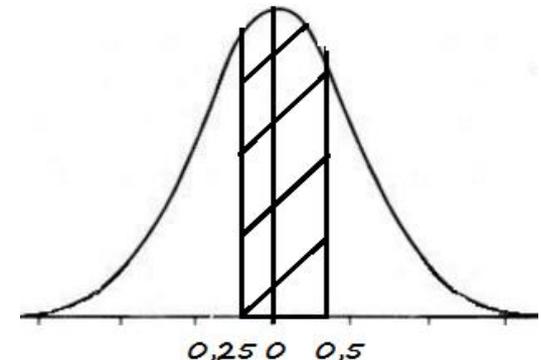
$$P(190 < X < 520) = P(-0,25 < z < 0,5)$$

$P(-0,25 < Z < 0) + P(0 < Z < 0,5)$ como:

$$P(-0,25 < Z < 0) = 0,0987$$

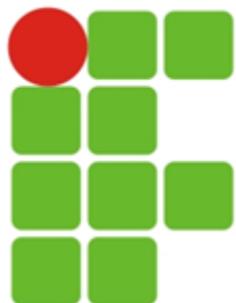
$$P(0 < Z < 0,5) = 0,1915$$

$$P(-0,25 < Z < 0) + P(0 < Z < 0,5) = 0,0987 + 0,1915 = 0,2902$$



Dúvidas:





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SUL-RIO-GRANDENSE

Exercícios



**KEEP
CALM
AND
MÃOS
À OBRA**

Exercícios:

1- Um teste padronizado de escolaridade tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10. Determine a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota:

- a) maior que 120
- b) maior que 80
- c) entre 85 e 115
- d) maior que 100

2- Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuídos com média 63,5kg e desvio padrão de 5,5 kg. Determine o número de estudantes que pesam:

- a) entre 60 e 70 kg
- b) mais que 63,2 Kg
- c) menos que 68 Kg

3. A duração de um certo componente eletrônico tem média 850 dias e desvio padrão de 40 dias. Sabendo que a distribuição é normalmente distribuída, calcule a probabilidade desse componente durar:

- a) entre 700 e 1000 dias
- b) mais de 800 dias
- c) menos de 750 dias

Dúvidas:

