



**INSTITUTO FEDERAL**  
Sul-rio-grandense

Câmpus  
Sapucaia do Sul

# LÓGICA MATEMÁTICA

Prof. Dr. Alex Mulattieri Suarez Orozco

# Introdução

- A lógica matemática é a base do pensamento computacional
  - Ou seja, como o computador realiza tarefas.
- A linguagem falada (português, espanhol, inglês, etc.) possui ambiguidades.
  - Ex: Eu tenho duas mangas (mangas de camisa ou frutas)?
- O computador não consegue distinguir ambiguidades sozinho.
  - Ao programar um computador, não pode haver ambiguidades.

# Introdução

- A lógica é a ferramenta fundamental para programarmos um computador de forma não ambígua.
- O estudo da lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto.

# Introdução

- A lógica surgiu na Grécia, no século 4 antes de cristo.
- O pai da lógica foi Aristóteles.
- Aristóteles se preocupou com as formas de raciocínio, onde a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos.

# Introdução

- A lógica se encarrega de formular leis gerais de encadeamentos de conceitos e juízos, que levam à descoberta de novas verdades.
- Essa forma de encadeamento é chamada de argumento.
- As afirmações envolvidas são chamadas de proposições.

# Introdução

- Quando tomamos como verdadeiras certo número de afirmações iniciais e a partir daí, usando argumentos logicamente válidos, começamos a deduzir outras afirmações, construímos uma teoria.
- A lógica também consiste no exame e na análise dos métodos incorretos do raciocínio, ou seja as falácias.
- O estudo de lógica proporcional, através da aplicação de algumas técnicas, determinar a correção ou incorreção de todos os raciocínios.

# Proposição

- No estudo da lógica matemática, o conceito mais básico é o de Proposição, que vem do verbo propor, ou seja, significa submeter à apreciação.
- Uma proposição também é vista como uma sentença e pode ser descrita em uma linguagem.
- Uma proposição é uma declaração afirmativa à qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso.
  - Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

# Proposição

- Exemplos:
  - O Brasil fica na América. (proposição verdadeira)
  - A lua é de queijo. (proposição falsa)
- A proposição é o elemento básico a partir do qual os argumentos são construídos, sendo também o principal objeto de estudo na lógica proposicional.

A proposição  
“Esta frase é falsa.”  
é verdadeira ou falsa??

# Proposição

- Se proposição for verdadeira, significa que, pelo que a frase afirma, a proposição deveria ser falsa.
- Se a proposição for falsa, significa que o que a frase afirma não é verdade, então a proposição deveria ser verdadeira.
- Isso é chamado de contradição, ou paradoxo.

# Proposição

- Uma proposição simples normalmente é formada por:
  - Um sujeito;
  - Um verbo;
  - E seus complementos.
- Além disso, uma proposição simples possui uma representação lógica (ou valor lógico):
  - Verdadeiro (V)
  - Falso (F)

# Proposição

- Exemplos:
  - A lua é um satélite da Terra.
  - Sócrates é um homem.
  - Eu estudo Lógica.
  - Todos os homens são mortais.
- Geralmente a representação lógica de uma proposição está alinhada com a sua representação lógica no mundo real, mas não é obrigatório.

# Proposição

- Uma proposição deve ser sempre uma sentença afirmativa.
  - (V ou F)
- Uma sentença interrogativa não é uma proposição.
  - Ex: Paulo foi a feira?
- Uma sentença exclamativa não é uma proposição.
  - Ex: Como você é inteligente!

# Proposição

- Uma sentença imperativa não é uma proposição.
  - Ex: Faça todos os exercícios agora.
- Uma sentença ambígua não é uma proposição.
  - Ex: Eu encontrei Maria com uma camisa amarela.
  - Eu ou a Maria estava com a camisa amarela??
- Uma sentença pode ser representada simbolicamente.
  - Ex:  $4 + 5 = 9$

# Proposição

- Uma sentença imperativa não é uma proposição.
  - Ex: Faça todos os exercícios agora.
- Uma sentença ambígua não é uma proposição.
  - Ex: Eu encontrei Maria com uma camisa amarela.
  - Eu ou a Maria estava com a camisa amarela??

# Proposição

- Podemos representar uma proposição por uma notação simbólica.
  - Normalmente com uma letra. Não é obrigatório ser só uma letra.
- Ex:
  - O Remor é professor. (r)
  - O Carro é Rosa. (c)

# Proposição

- Se colocarmos a mesma letra (r) para as duas proposições, não podemos distinguir.
- Se quisermos representar com a mesma letra, poderíamos representar cada proposição por um conjunto de letras:
  - O Remor é professor. (Re), (Rp), etc.
  - O Carro é Rosa. (Ro), (Rc), (Rs), etc.

# Operações Lógicas

- As proposições podem ser simples ou compostas.
  - Exemplos de proposições simples:
    - $p$ : O carro é azul.
    - $q$ : João é motorista.
- Quando combinamos as proposições simples, formamos uma proposição composta.
  - Exemplo:
    - O carro é azul e João é motorista.

# Operações Lógicas

- Dessa forma, podemos realizar cálculos envolvendo as proposições.
- Esses cálculos vão resultar em V ou F.
- Para isso usamos conectivos lógicos:
  - Negação
  - Conjunção
  - Disjunção
  - Condicional
  - Bi-condicional

# Operações Lógicas - Negação

- Negação (símbolo  $\sim$  ou  $\neg$ ).
- Representado pelos termos NÃO, NÃO É VERDADE QUE, NEM, É FALSO QUE.
- A negação inverte o valor lógico de uma proposição ou de uma expressão lógica (formada por proposições e operações lógicas).

# Operações Lógicas - Negação

- Se utiliza uma tabela verdade para representar as possibilidades de resultados da operação lógica.
  - Ex: p: Paulo comeu arroz.
- A negação de p (ou seja,  $\sim p$ ) se representa por uma tabela verdade.
- Inicialmente se faz uma tabela com a proposição na primeira linha, e nas linhas seguintes se insere todos os possíveis valores lógicos que essa proposição pode assumir.

p
V
F

# Operações Lógicas - Negação

- Em seguida, se insere uma nova coluna na tabela, à direita, com a proposição representada com a negação.

p	$\sim p$
V	
F	

- Por fim, se insere o resultado da operação lógica nas células em branco

p	$\sim p$
V	F
F	V

# Operações Lógicas - Negação

- Ex:
  - p: Paulo comeu arroz.
  - Se p é verdadeiro,  $\sim p$  é falso.
  - Se p é falso,  $\sim p$  é verdadeiro.
  
- Sempre defina a proposição, para depois aplicar a operação lógica.
  - Ex: m: Maria não toma leite.
  - A negação de m ( $\sim m$ ) fica: Maria toma leite.

# Operações Lógicas - Conjunção

- Símbolo  $\wedge$
- Representado pelos termos E, MAS.
- Une duas proposições ou expressões lógicas.
- Ex:
  - p: Paulo comeu arroz.
  - q: Química é legal.
  - $p \wedge q$ : Paulo comeu arroz e química é legal.

# Operações Lógicas - Conjunção

- Tabela verdade:
  - Passo 1: Cria uma tabela com as proposições na primeira linha e a combinação dos possíveis valores lógicos dessas proposições nas linhas seguintes:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

# Operações Lógicas - Conjunção

- Tabela verdade:
  - Passo 2: Insere uma nova coluna, à direita, com a operação.

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Operações Lógicas - Conjunção

- Tabela verdade:
  - Passo 3: Aplica a regra da operação.
  - Regra do  $\wedge$ : O resultado é verdadeiro somente quando as proposições são verdadeiras, caso contrário, o resultado é falso.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

# Operações Lógicas - Conjunção

- Exemplos:
  - a: Ana tomou café.
  - b: Bruno faltou a aula hoje.
  - Considerando que  $a = V$ ,  $b = F$ , qual o resultado lógico de  $a \wedge b$ ?

a	b	$a \wedge b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Resposta: F

# Operações Lógicas - Disjunção

- Símbolo  $\vee$
- Representado pelos termos OU.
- Une duas proposições ou expressões lógicas.
- Ex:
  - $p$ : Paulo comeu arroz.
  - $q$ : Química é legal.
  - $p \vee q$ : Paulo comeu arroz ou química é legal.

# Operações Lógicas - Disjunção

- Tabela verdade:
  - Passo 1: Cria uma tabela com as proposições na primeira linha e a combinação dos possíveis valores lógicos dessas proposições nas linhas seguintes:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

# Operações Lógicas - Disjunção

- Tabela verdade:
  - Passo 2: Insere uma nova coluna, à direita, com a operação.

p	q	$p \vee q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Operações Lógicas - Disjunção

- Tabela verdade:
  - Passo 3: Aplica a regra da operação.
  - Regra do v: O resultado é falso somente quando as proposições são falsas, caso contrário, o resultado é verdadeiro.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

# Operações Lógicas - Disjunção

- Exemplos:
  - a: Ana tomou café.
  - b: Bruno faltou a aula hoje.
  - Considerando que  $a = F$ ,  $b = V$ , qual o resultado lógico de  $a \vee b$ ?

a	B	$a \vee b$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Resposta: V

# Operações Lógicas - Condicional

- Símbolos  $\rightarrow$ ,  $->$  (seta para a direita)
- Representado pelos termos Se ..., Então ...
- Une duas proposições ou expressões lógicas, numa relação de antecedente e conseqüente, ou de implicação.
- Ex:
  - p: Paulo comeu arroz.
  - q: Química é legal.
  - $p -> q$ : Se Paulo comeu arroz, então química é legal.
  - p = antecedente; q = conseqüente;  $p -> q$  = p implica em q.

# Operações Lógicas - Condicional

- Pode se dizer que:
  - $p$  é condição **suficiente** para  $q$
  - $q$  é condição **necessária** para  $p$ .
- A condicional não afirma que o conseqüente é consequência do antecedente!!!!
- A condicional somente afirma que existem uma relação entre os valores lógicos do antecedente e o conseqüente.

# Operações Lógicas - Condicional

- Tabela verdade:
  - Passo 1: Cria uma tabela com as proposições na primeira linha e a combinação dos possíveis valores lógicos dessas proposições nas linhas seguintes:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

# Operações Lógicas - Condicional

- Tabela verdade:
  - Passo 2: Insere uma nova coluna, à direita, com a operação.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Operações Lógicas - Condicional

- Tabela verdade:
  - Passo 3: Aplica a regra da operação.
  - Regra do  $\rightarrow$ : O resultado é falso somente quando a causa é verdadeira e a consequência é falsa, caso contrário, o resultado é verdadeiro.

p	Q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

# Operações Lógicas - Condicional

- Exemplos:
  - a: Ana tomou café.
  - b: Bruno faltou a aula hoje.
  - Considerando que  $a = F$ ,  $b = F$ , qual o resultado lógico de  $a \rightarrow b$ ?

a	B	$a \rightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Resposta: V

# Operações Lógicas - Condicional

- Exemplos:
  - x: Eu nasci em Porto Alegre.
  - y: Eu sou gaúcho.
    - $V \rightarrow V = V$ 
      - Se eu nasci em Porto Alegre, então sou gaúcho. (OK)
    - $V \rightarrow F = F$ 
      - Se eu nasci em Porto Alegre, então não sou gaúcho. (Tem como?)
    - $F \rightarrow V = V$ 
      - Se eu não nasci em Porto Alegre, então sou gaúcho. (OK, nasci em Canoas)
    - $F \rightarrow F = V$ 
      - Se eu não nasci em Porto Alegre, então não sou gaúcho. (OK, nasci em Manaus)

# Operações Lógicas - Bicondicional

- Símbolos  $\leftrightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  (setas para os dois lados)
- Representado pelos termos SE E SOMENTE SE, UNICAMENTE SE, EXCETO SE.
- Une duas proposições ou expressões lógicas, numa relação de bi-implicação, ou seja, a conjunção de duas implicações.
- Ex:
  - p: Paulo comeu arroz.
  - q: Química é legal.
  - $p \leftrightarrow q$ : Paulo comeu arroz, se e somente se química é legal.
  - $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

# Operações Lógicas - Bicondicional

- Pode se dizer que:
  - $p$  é condição **suficiente e necessária** para  $q$
  - $q$  é condição **suficiente e necessária** para  $p$ .

# Operações Lógicas - Bicondicional

- Tabela verdade:
  - Passo 1: Cria uma tabela com as proposições na primeira linha e a combinação dos possíveis valores lógicos dessas proposições nas linhas seguintes:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

# Operações Lógicas - Bicondicional

- Tabela verdade:
  - Passo 2: Insere uma nova coluna, à direita, com a operação.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Operações Lógicas - Bicondicional

- Tabela verdade:
  - Passo 3: Aplica a regra da operação.
  - Regra do v: O resultado é verdadeiro quando ambos são verdadeiros ou ambos são falsos. Caso somente uma proposição ou expressão seja verdadeira, o resultado final é falso.

p	Q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

# Operações Lógicas - Bicondicional

- Exemplos:
  - a: Ana tomou café.
  - b: Bruno faltou a aula hoje.
  - Considerando que  $a = F$ ,  $b = F$ , qual o resultado lógico de  $a \leftrightarrow b$ ?

a	B	$a \leftrightarrow b$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Resposta: V

# Operações Lógicas - Precedência de operações

- Existem várias operações numa mesma expressão lógica.
  - Ex:  $a \rightarrow b \wedge c$
- Qual operação deve ser realizada primeiro??
- Precedência:
  1. Negação ( $\sim$ )
  2. Conjunção ( $\wedge$ ) e Disjunção ( $\vee$ )
  3. Condicional ( $\rightarrow$ )
  4. Bicondicional ( $\leftrightarrow$ )

# Operações Lógicas - Precedência de operações

- Essa ordem de precedência indica que:
  - A operação de negação é a primeira a ser executada;
  - em seguida, as operações de conjunção e disjunção na ordem em que estiverem dispostas;
  - depois deve ser executada a operação de condicionamento;
  - Por fim, a de bicondicionamento.

# Operações Lógicas - Precedência de operações

- Passo a passo para realizar a precedência de operadores:
  - Passo 1. Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem.
  - Passo 2. Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, na ordem em que aparecerem.
  - Passo 3. Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem.
  - Passo 4. Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

# Operações Lógicas - Precedência de operações

- Passo a passo para realizar a precedência de operadores:
  - Passo 1. Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem.
  - Passo 2. Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, na ordem em que aparecerem.
  - Passo 3. Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem.
  - Passo 4. Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

# Operações Lógicas - Precedência de operações

- Exemplo:  $P \wedge \sim Q \rightarrow R \vee S$ 
  - Primeiro resolve  $\sim Q$  (vou representar por solução 1),
  - Depois resolve  $P \wedge \sim Q$  (solução 2),
  - Em seguida resolve  $R \vee S$  (solução 3),
  - Por fim resolve o resultado final. (solução 2  $\rightarrow$  solução 3)

# Operações Lógicas - Precedência de operações

- Para facilitar, usa-se parênteses.
  - $(P \wedge (\sim Q)) \rightarrow (R \vee S)$
  - $(P \wedge \sim Q) \rightarrow (R \vee S)$
  - Primeiro se resolve os parênteses mais internos, mantendo o passo a passo.
  - Quando existir uma negação na frente de um parênteses, nega-se o resultado final do que está dentro do parênteses.
  - Exemplo:  $\sim(A \wedge B)$ 
    - Se  $A = V$  e  $B = V$ , o resultado de  $\sim(A \wedge B)$  será  $\sim(V)$ , portanto o resultado final da expressão será F.

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

- Exemplo:  $P \wedge \sim Q \rightarrow R$ 
  - Tabela verdade:
    - Passo 1: Montar a tabela verdade das proposições simples.
    - Dica 1 : Número de linhas da tabela =  $1 + 2^{(\text{número de proposições})}$
    - No exemplo temos 3 proposições simples, logo teremos  $1 + 2^3 = 1 + 8 = 9$  linhas.

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

P	Q	R

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

- Dica 2: Contando da direita para a esquerda:
  - 1ª coluna 1 V e 1 F, repete até o fim das linhas;
  - 2ª coluna 2 Vs e 2 Fs, repete até o fim das linhas;
  - 3ª coluna 4 Vs e 4 Fs, repete até o fim das linhas;
  - Ou seja, o número de Vs e Fs em sequência é:

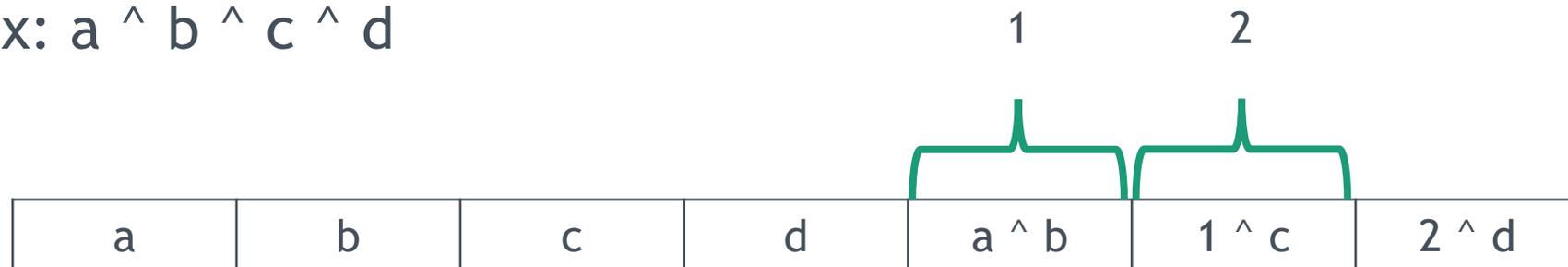
$$2^{(\text{número da coluna} - 1)}$$

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

P	Q	R
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

- Passo 2: Incluir uma coluna, à direita, para cada operação a ser realizada, na ordem de solução.
- Dica: Quando a expressão lógica ficar muito grande, coloca-se um apelido na coluna respectiva à operação composta.
- **PRECISA INDICAR O QUE ESTÁ SENDO APELIDADO!!!**
- Ex:  $a \wedge b \wedge c \wedge d$



# Tabela Verdade com várias operações lógicas

P	Q	R	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$P \wedge \sim Q \rightarrow R$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

- Passo 3: Solucionar a tabela, da esquerda para a direita.

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

P	Q	R	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$P \wedge \sim Q \rightarrow R$
V	V	V	F		
V	V	F	F		
V	F	V	V		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	V	F	F		
F	F	V	V		
F	F	F	V		

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

P	Q	R	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$P \wedge \sim Q \rightarrow R$
V	V	V	F	F	
V	V	F	F	F	
V	F	V	V	V	
V	F	F	V	V	
F	V	V	F	F	
F	V	F	F	F	
F	F	V	V	F	
F	F	F	V	F	

# Tabela Verdade com várias operações lógicas

P	Q	R	$\sim Q$	$P \wedge \sim Q$	$P \wedge \sim Q \rightarrow R$
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

# Tautologia, Contradição e Contingência

- Quando o resultado final de uma tabela-verdade possui somente VERDADEIROS, dizemos que a expressão lógica é uma TAUTOLOGIA.
- Ou seja, independente dos valores lógicos das proposições simples, a proposição composta será sempre VERDADEIRA.

# Tautologia, Contradição e Contingência

- Ex:  $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- A proposição composta  $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$  é uma TAUTOLOGIA.

# Tautologia, Contradição e Contingência

- Quando o resultado final de uma tabela-verdade possui somente FALSOS, dizemos que a expressão lógica é uma CONTRADIÇÃO.
- Ou seja, independente dos valores lógicos das proposições simples, a proposição composta será sempre FALSA.

# Tautologia, Contradição e Contingência

- Ex:  $\sim(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q)$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$	$\sim(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q)$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F

- A proposição composta  $\sim(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q)$  é uma CONTRADIÇÃO.

# Tautologia, Contradição e Contingência

- Quando o resultado final de uma tabela-verdade possuir algum FALSO e algum VERDADEIRO, chamamos essa expressão lógica de contingência.
- Ou seja, o resultado lógico da proposição composta depende dos valores lógicos das proposições simples.

# Tautologia, Contradição e Contingência

- Ex:  $((P \rightarrow Q) \wedge P) \leftrightarrow P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \leftrightarrow P$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- A proposição composta  $\sim(((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q)$  é uma CONTINGÊNCIA.

# Referências

- Pinho, A. **Introdução à logica matemática**. 1999. Disponível em: <https://hudsoncosta.files.wordpress.com/2011/01/introducaoalogicamatematica.pdf>. Acesso em: 18/02/2019.
- Bertolini, C.; da Cunha, G.; Fortes, P. **Lógica Matemática**, 1º ed., 2017. Disponível em: [https://nte.ufsm.br/images/identidade\\_visual/LogicaMatematica.pdf](https://nte.ufsm.br/images/identidade_visual/LogicaMatematica.pdf). Acesso em: 18/02/2019.